تمام بورڈز آف انٹرمیڈیٹ اینڈ سیکنڈری ایجوکیشن کے نئے نصاب
اور پیپر پیٹرن کے عین مطابق
ہمدرد
امتحانی
ریاضی
سائنس گروپ
ترمیم و اضافہ شدہ ایڈیشن
» پیپر کا مکمل حل » مکمل حل شدہ مشقی سوالات
» معروضی سوالات (کثیرالانتخابی + مختصر جوابی)
جماعت
9
A+ گریڈ میں 100 فیصد یقینی کامیابی کے حصول کا واحد ذریعہ

سلیبس ریاضی نہم سائنس گروپ

	اپریل	مئی/جون (جزوی)	(جزوی) اگست/ستمبر	اکتوبر	نومبر	دسمبر	جنوری	فروری	مارچ
جنرل ریاضی	یونٹ نمبر: 1 قالب اور قالبوں کا مقطع ٹیکسٹ بک صفحہ 1 تا 36	یونٹ نمبر: 2 - 3 حقیقی اور غیر حقیقی (کمپلیکس) اعداد اور لوگارتھم ٹیکسٹ بک صفحہ 37 تا 88	یونٹ نمبر: 4-6 الجبری جملے اور الجبری کلیے تا الجبری جملوں کا ذواضعاف اقل، عاداعظم اور جذرالمربع ٹیکسٹ بک صفحہ 89 تا 156	یونٹ نمبر: 7-8 یک درجی مساواتیں اور غیر مساواتیں اور خطی یالائن (لینئر) گراف اور اس کے مستعملات ٹیکسٹ بک صفحہ 157 تا 201	یونٹ نمبر: 9 - 10 کوآرڈینیٹ جیومیٹری کا تعارف اور متماثل مثلثان ٹیکسٹ بک صفحہ 202 تا 236	یونٹ نمبر: 11 - 14 متوازی الاضلاع اور تکونی اشکال تا نسبت اور تناسب ٹیکسٹ بک صفحہ 237 تا 284	یونٹ نمبر: 15 - 17 مسئلہ فیثا غورث تا عملی جیومیٹری۔ مثلثیں ٹیکسٹ بک صفحہ 285 تا 318	مکمل نصاب کا اعادہ	ایضاً
کلاسک ریاضی (سائنس گروپ)	کلاسک ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 5 تا 61	کلاسک ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 62 تا 115	کلاسک ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 116 تا 210	کلاسک ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 211 تا 266	کلاسک ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 267 تا 306	کلاسک ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 307 تا 374	کلاسک ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 375 تا 432	ایضاً	ایضاً

فہرست

قالبوں کا تعارف:

قالب کا تصور انگلستان کے مشہور ریاضی دان آرتھر کیلے نے پیش کیا۔ قالب کئی علوم مثلاً ریاضیات، فزکس اور کمپیوٹر سائنس وغیرہ میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

تعریف: حقیقی اعداد کا ایک مستطیلی اُفقی اور عمودی قطاری خاکہ جو بریکٹ سے محیط کیا گیا ہو ایک قالب کہلاتا ہے۔

قالب کی قطاریں اور کالم:

کسی قالب A میں ارکان کی اُفقی ساخت کو قطار کہتے ہیں اور ارکان کی عمودی ساخت کو کالم کہتے ہیں۔

حل مشق 1.1

1- درج ذیل قالبوں کا مرتبہ بتایئے۔

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -5 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}4\\0\\6\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}a & d\\ b & e\\ c & f\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}, \quad H=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

حل:

(i) $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -5 & 6\end{bmatrix}$

اس قالب میں قطاروں کی تعداد = 2

کالموں کی تعداد = 2

اس لیے قالب A کا مرتبہ 2-by-2 ہے۔

(ii) $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

اس قالب میں قطاروں کی تعداد = 2

کالموں کی تعداد = 2

اس لیے قالب B کا مرتبہ 2-by-2 ہے۔

(iii) $C=\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}$

اس قالب میں قطاروں کی تعداد = 1

کالموں کی تعداد = 2

اس لیے قالب C کا مرتبہ 1-by-2 ہے۔

(iv) $D=\begin{bmatrix}4\\0\\6\end{bmatrix}$

اس قالب میں قطاروں کی تعداد = 3

کالموں کی تعداد = 1

اس لیے قالب D کا مرتبہ 3-by-1 ہے۔

(v) $E = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$

اس قالب میں قطاروں کی تعداد = 3
کالموں کی تعداد = 2
اس لیے قالب E کا مرتبہ 3-by-2 ہے۔

(vi) $F = [2]$

اس قالب میں قطاروں کی تعداد = 1
کالموں کی تعداد = 1
اس لیے قالب F کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

(vii) $G = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

اس قالب میں قطاروں کی تعداد = 3
کالموں کی تعداد = 3
اس لیے قالب G کا مرتبہ 3-by-3 ہے۔

(viii) $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

اس قالب میں قطاروں کی تعداد = 2
کالموں کی تعداد = 3
اس لیے قالب H کا مرتبہ 2-by-3 ہے۔

-2 معلوم کیجیے کہ مندرجہ ذیل میں سے کون کون سے قالب آپس میں مساوی ہیں۔

$A = [3],\ B = [3 \quad 5],\ C = [5-2],\ D = [5 \quad 3],\ E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix},$

$G = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 3+3 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix},\ I = [3 \quad 3+2],\ J = \begin{bmatrix} 2+2 & 2-2 \\ 2+4 & 2+0 \end{bmatrix}$

حل:

$A = [3]_{(1,1)},\ B = [3 \quad 5]_{(1,2)},\ C = [5-2] = [3]_{(1,1)},\ D = [5 \quad 3]_{(1,2)},\ E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}_{(2,2)},\ F = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}_{(2,1)}$

$G = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}_{(2,1)},\ H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}_{(2,2)},\ I = [3 \quad 3+2] = [3 \quad 5]_{(1,2)}$

$J = \begin{bmatrix} 2+2 & 2-2 \\ 2+4 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}_{(2,2)}$

مساوی قالب: دو قالبوں کو مساوی قالب صرف اور صرف تب کہا جاتا ہے جب ان کا مرتبہ اور متناظرہ ارکان برابر ہوں۔

A = C, B = I, E = H = J , F = G.

-3 a، b، c اور d کی قیمتیں معلوم کیجیے جو دی ہوئی مساوات کو درست قائم رکھتی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} a+c & a+2b \\ c-1 & 4d-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 3 & 2d \end{bmatrix}$$

حل:

$a + c = 0$ .... (1)

$a + 2b = -7$ .... (2)

$c - 1 = 3$ .... (3)

$4d - 6 = 2d$ .... (4)

مساوات نمبر (3) سے

$c - 1 = 3$

$c = 3 + 1$

مساوات نمبر (4) سے

$$c = 4$$
$$4d - 6 = 2d$$
$$4d - 2d = 6$$
$$2d = 6$$
$$d = 3$$

$c = 4$ کی قیمت کو مساوات نمبر (1) میں درج کرنے سے

$$a + 4 = 0$$
$$a = -4$$

$a = -4$ کی قیمت کو مساوات نمبر (2) میں درج کرنے سے

$$-4 + 2b = -7$$
$$2b = -7 + 4$$
$$2b = -3$$
$$b = -1.5$$

پس $a = -4, b = -1.5, c = 4, d = 3$

قالبوں کی اقسام: قالبوں کی مندرجہ ذیل اقسام ہیں:

-1 قطاری قالب	-2 کالمی قالب	-3 مستطیلی قالب	-4 مربعی قالب
-5 صفری قالب	-6 ٹرانسپوز قالب	-7 منفی قالب	-8 سیمٹرک قالب
-9 سکیو سیمٹرک قالب	-10 وتری قالب	-11 سکیلر قالب	-12 وحدانی قالب

حل مشق 1.2

-1 دیے ہوئے مندرجہ ذیل قالبوں میں سے (i) وحدانی قالبوں (ii) قطاری قالبوں (iii) کالمی قالبوں اور (iv) صفری قالبوں کی شناخت اور تصدیق بھی کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

حل:

-1 قالب A ایک صفری قالب ہے کیونکہ اس کے تمام ارکان صفر ہیں۔

-2 قالب B ایک قطاری قالب ہے کیونکہ اس کی صرف ایک قطار ہے۔

-3 قالب C ایک کالمی قالب ہے کیونکہ اس کا صرف ایک کالم ہے۔

-4 قالب D ایک وحدانی قالب ہے کیونکہ اس کا ہر وتری رکن ایک (1) ہے۔

-5 قالب E ایک صفری قالب ہے کیونکہ اس کے تمام ارکان صفر ہیں۔

-6 قالب F ایک کالمی قالب ہے کیونکہ اس کا صرف ایک کالم ہے۔

-2 نیچے دیے ہوئے قالبوں میں سے (a) مربعی قالبوں (b) مستطیلی قالبوں (c) قطاری قالبوں (d) کالمی قالبوں (e) وحدانی قالبوں اور (f) صفری قالبوں کی شناخت کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 7 \\ 12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & 10 & -1 \end{bmatrix}$ (vii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ix) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

حل:
(a) مربعی قالب: (iii)، (iv)، (viii)
(b) مستطیلی قالب: (i)، (ii)، (v)، (vi)، (vii)، (ix)
(c) قطاری قالب: (vi)
(d) کالمی قالب: (ii)، (vii)
(e) وحدانی قالب: (iv)
(f) صفری قالب: (ix)

-3 نیچے دیے ہوئے قالبوں میں سے وتری، سکیلر اور وحدانی قالبوں کی شناخت کیجیے۔

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix} 5-3 & 0 \\ 0 & 1+1 \end{bmatrix}$$

حل:
سکیلر قالب: A، E
وتری قالب: A، B، C، D، E
وحدانی قالب: C

-4 نیچے دیے ہوئے A، B، C، D اور E قالبوں کے بالترتیب منفی قالب معلوم کیجیے۔

$$A=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:

$$-A=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, -B=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, -C=\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, -D=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, -E=\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

-5 نیچے دیے ہوئے قالبوں کے ٹرانسپوز قالب معلوم کیجیے۔

$$A=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad E=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad F=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

حل:

(i) $A=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$,

(ii) $B=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow B'=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$

(iii) $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C'=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

(iv) $D=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow D'=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(v) $E=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow E'=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(vi) $F=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow F'=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

-6 اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}$ تو تصدیق کیجیے کہ

(i) $(A^t)^t = A$ (ii) $(B^t)^t = B$

(i) $(A^t)^t = A$

حل:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow (A^t)^t=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=A$$

پس ثابت ہوا کہ $(A^t)^t = A$

(ii) $(B^t)^t = B$

حل:

$$B=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}\Rightarrow (B^t)^t=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}=B$$

پس ثابت ہوا کہ $(B^t)^t = B$

قالبوں پر عوامل:

-1 قالبوں کی جمع اور تفریق

-2 قالب کو ایک حقیقی عدد سے ضرب دینا

-3 قالبوں کی جمعی خاصیتوں کے قوانین

قانون مبادلہ بلحاظ جمع $A+B = B+A$

قانون تلازم بلحاظ جمع $(A+B)+C = A+(B+C)$

-4 قالب کا جمعی ذاتی قالب $A+B = A=B+A$

-5 قالب کا جمعی معکوس $A+B = O = B+A$

حل مشق 1.3

-1 درج ذیل قالبوں میں سے کون کون سے قالب ایک دوسرے سے جمعی خاصیت رکھتے ہیں نشاندہی کیجیے۔

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\\1&-2\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}2+1\\3\end{bmatrix},E=\begin{bmatrix}-1&0\\1&2\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}3&2\\1+1&-4\\3+2&2+1\end{bmatrix}$$

حل: (i) قالب A اور قالب E جمعی خاصیت رکھتے ہیں کیونکہ ان دونوں کا مرتبہ ایک جیسا ہے۔

(ii) قالب B اور قالب D جمعی خاصیت رکھتے ہیں کیونکہ ان دونوں کا مرتبہ برابر ہے۔

(iii) قالب C اور قالب F جمعی خاصیت رکھتے ہیں کیونکہ ان دونوں کا مرتبہ برابر ہے۔

-2 مندرجہ ذیل قالبوں کے جمعی معکوس معلوم کیجیے۔

$$A=\begin{bmatrix}2&4\\-2&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-1&3\\3&-2&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}1&0\\-3&-2\\2&1\end{bmatrix},E=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&1\\-1&\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

حل: (i) اگر $A=\begin{bmatrix}2&4\\-2&1\end{bmatrix}$ ہو تو A کا جمعی معکوس ہے۔ $-A=\begin{bmatrix}-2&-4\\2&-1\end{bmatrix}$

(ii) اگر $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$ ہوتو B کا جمعی معکوس ہے۔ $-B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -3\\ -3 & 2 & -1\end{bmatrix}$

(iii) اگر $C=\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix}$ ہوتو C کا جمعی معکوس ہے۔ $-C=\begin{bmatrix}-4\\ 2\end{bmatrix}$

(iv) اگر $D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ ہوتو D کا جمعی معکوس ہے۔ $-D=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$

(v) اگر $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ہوتو E کا جمعی معکوس ہے۔ $-E=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

(vi) اگر $F=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ ہوتو F کا جمعی معکوس ہے۔ $-F=\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -1\\ 1 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$

-3 اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ اور $D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ ہوتو ان کی مدد سے مندرجہ ذیل قالب معلوم کیجیے۔

(i) $\mathbf{A}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

حل: $A+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+1 & 2+1\\ 2+1 & 1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

(ii) $\mathbf{B}+\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}$

حل: $B+\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+(-2)\\ -1+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{C}+\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\end{bmatrix}$

حل: $C+\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+(-2) & -1+1 & 2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5\end{bmatrix}$

(iv) $\mathbf{D}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$

حل: $D+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & 2+1 & 3+0\\ -1+2 & 0+0 & 2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$

(v) **2A**

حل: $2A=2\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)(2) & (2)(2)\\ (2)(2) & (1)(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

(vi) **(–1) B**

حل: $(-1)B=(-1)\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1)(-1)\\ (-1)(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$

(vii) (–2) C

حل: $(-2)C=(-2)[1\ \ -1\ \ 2]=[(-2)(1)\ \ (-2)(-1)\ \ (-2)(2)]=[-2\ \ 2\ \ -4]$

(viii) 3D

حل: $3D=3\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(3)(1)&(3)(2)&(3)(3)\\(3)(-1)&(3)(0)&(3)(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6&9\\-3&0&6\end{bmatrix}$

(ix) 3C

حل: $3C=3[1\ \ -1\ \ 2]=[(3)(1)\ \ (3)(-1)\ \ (3)(2)]=[3\ \ -3\ \ 6]$

4- قالبوں کے جمعی اور تفریقی عمل کی مدد سے حاصل قالب معلوم کیجیے۔

(i) $\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2\\3&0\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$

حل: $\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2\\3&0\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0&0+2\\0+3&1+0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1+1&2+1\\3+1&1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\4&1\end{bmatrix}$

(ii) $\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2\\3&0\end{bmatrix}\right)-\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$

حل: $\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2\\3&0\end{bmatrix}\right)-\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0&0+2\\0+3&1+0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1-1&2-1\\3-1&1-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}$

(iii) $[2\ \ 3\ \ 1]+([1\ \ 0\ \ 2]-[2\ \ 2\ \ 2])$

حل: $[2\ \ 3\ \ 1]+([1\ \ 0\ \ 2]-[2\ \ 2\ \ 2])=[2\ \ 3\ \ 1]+[1-2\ \ 0-2\ \ 2-2]$

$=[2\ \ 3\ \ 1]+[-1\ \ -2\ \ 0]$

$=[2+(-1)\ \ 3+(-2)\ \ 1+0]=[1\ \ 1\ \ 1]$

(iv) $\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-1&-1\\0&1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$

حل: $\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-1&-1\\0&1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&2+1&3+1\\-1+2&-1+2&-1+2\\0+3&1+3&2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&1&1\\3&4&5\end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&-2\\-2&-1&0\\0&2&-1\end{bmatrix}$

حل: $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&-2\\-2&-1&0\\0&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&2+0&3+(-2)\\2+(-2)&3+(-1)&1+0\\3+0&1+2&2+(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&1\\0&2&1\\3&3&1\end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right)$

حل

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2+1 & 1+1\\1+1 & 0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+3 & 2+2\\0+2 & 1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4\\2 & 2\end{bmatrix}$$

-5 اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & -2 & 2\\3 & 1 & 3\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ قالب ہوں تو درج ذیل قوانین کی تصدیق کیجیے۔

(i) $A+C=C+A$

حل

L. H. S. $=A+C$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+(-1) & 2+0 & 3+0\\2+0 & 3+(-2) & 1+3\\1+1 & -1+1 & 0+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\2 & 1 & 4\\2 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad \text{—(1)}$$

R.H.S. $=C+A$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+1 & 0+2 & 0+3\\0+2 & -2+3 & 3+1\\1+1 & 1+(-1) & 2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\2 & 1 & 4\\2 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad \text{—(2)}$$

مساوات نمبر 1 اور مساوات نمبر 2 سے ثابت ہوا کہ $A+C=C+A$

(ii) $A+B=B+A$

حل

L. H. S. $=A+B$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & -2 & 2\\3 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & 2+(-1) & 3+1\\2+2 & 3+(-2) & 1+2\\1+3 & -1+1 & 0+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\4 & 1 & 3\\4 & 0 & 3\end{bmatrix} \quad \text{—(1)}$$

R.H.S. $=B+A$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & -2 & 2\\3 & 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & -1+2 & 1+3\\2+2 & -2+3 & 2+1\\3+1 & 1+(-1) & 3+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\4 & 1 & 3\\4 & 0 & 3\end{bmatrix} \quad \text{—(2)}$$

مساوات نمبر 1 اور مساوات نمبر 2 سے ثابت ہوا کہ $A+B=B+A$

(iii) $B+C=C+B$

حل

L. H. S. $=B+C$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & -2 & 2\\3 & 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+(-1) & -1+0 & 1+0\\2+0 & -2+(-2) & 2+3\\3+1 & 1+1 & 3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\2 & -4 & 5\\4 & 2 & 5\end{bmatrix} \quad \text{—(1)}$$

R.H.S. $=C+B$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & -2 & 2\\3 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+1 & 0+(-1) & 0+1\\0+2 & -2+(-2) & 3+2\\1+3 & 1+1 & 2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\2 & -4 & 5\\4 & 2 & 5\end{bmatrix} \quad \text{—(2)}$$

مساوات نمبر 1 اور مساوات نمبر 2 سے ثابت ہوا کہ $B + C = C + B$

(iv) $A + (B + A) = 2A + B$

حل:

L. H. S. $= A + (B + A)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+1 & -1+2 & 1+3 \\ 2+2 & -2+3 & 2+1 \\ 3+1 & 1+(-1) & 3+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+1 & 3+4 \\ 2+4 & 3+1 & 1+3 \\ 1+4 & -1+0 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{——} (1)$$

R.H.S. $= 2A + B$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1 & 4+(-1) & 6+1 \\ 4+2 & 6+(-2) & 2+2 \\ 2+3 & -2+1 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{——} (2)$$

مساوات نمبر 1 اور مساوات نمبر 2 سے ثابت ہوا کہ $A + (B + A) = 2A + B$

(v) $(C - B) + A = C + (A - B)$

حل:

L. H. S. $= (C - B) + A$

$$= \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-1 & 0-(-1) & 0-1 \\ 0-2 & -2-(-2) & 3-2 \\ 1-3 & 1-1 & 2-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+1 & 1+2 & -1+3 \\ -2+2 & 0+3 & 1+1 \\ -2+1 & 0+(-1) & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{——} (1)$$

R.H.S. $= C + (A - B)$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-1 & 2-(-1) & 3-1 \\ 2-2 & 3-(-2) & 1-2 \\ 1-3 & -1-1 & 0-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & 0+3 & 0+2 \\ 0+0 & -2+5 & 3+(-1) \\ 1+(-2) & 1+(-2) & 2+(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{——} (2)$$

مساوات نمبر 1 اور مساوات نمبر 2 سے ثابت ہوا کہ $(C - B) + A = C + (A - B)$

(vi) $2A + B = A + (A + B)$

حل

L. H. S. $= 2A + B$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1 & 4+(-1) & 6+1 \\ 4+2 & 6+(-2) & 2+2 \\ 2+3 & -2+1 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{——} (1)$$

R.H.S. $= A + (A+B)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+1 & 2+(-1) & 3+1 \\ 2+2 & 3+(-2) & 1+2 \\ 1+3 & -1+1 & 0+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+1 & 3+4 \\ 2+4 & 3+1 & 1+3 \\ 1+4 & -1+0 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{——} (2)$$

مساوات نمبر 1 اور مساوات نمبر 2 سے ثابت ہوا کہ $2A + B = A + (A + B)$

(vii) $(C - B) - A = (C - A) - B$

حل

L. H. S. $= (C-B) - A$

$$= \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-1 & 0-(-1) & 0-1 \\ 0-2 & -2-(-2) & 3-2 \\ 1-3 & 1-1 & 2-3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-1 & 1-2 & -1-3 \\ -2-2 & 0-3 & 1-1 \\ -2-1 & 0-(-1) & -1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 \\ -4 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{——} (1)$$

R.H.S. $= (C - A) - B$

$$= \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-1 & 0-2 & 0-3 \\ 0-2 & -2-3 & 3-1 \\ 1-1 & 1-(-1) & 2-0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-1 & -2-(-1) & -3-1 \\ -2-2 & -5-(-2) & 2-2 \\ 0-3 & 2-1 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 \\ -4 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{——} (2)$$

مساوات نمبر 1 اور مساوات نمبر 2 سے ثابت ہوا کہ $(C - B) - A = (C - A) - B$

(viii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

حل:

L. H. S. $= (A + B) + C$

$$= \left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & -2 & 2\\3 & 1 & 3\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+1 & 2+(-1) & 3+1\\2+2 & 3+(-2) & 1+2\\1+3 & -1+1 & 0+3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\4 & 1 & 3\\4 & 0 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2+(-1) & 1+0 & 4+0\\4+0 & 1+(-2) & 3+3\\4+1 & 0+1 & 3+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\4 & -1 & 6\\5 & 1 & 5\end{bmatrix} \quad \text{---}(1)$$

R. H. S. $= A + (B + C)$

$$= \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & -2 & 2\\3 & 1 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1+(-1) & (-1)+0 & 1+0\\2+0 & (-2)+(-2) & 2+3\\3+1 & 1+1 & 3+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\2 & -4 & 5\\4 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+0 & 2+(-1) & 3+1\\2+2 & 3+(-4) & 1+5\\1+4 & -1+2 & 0+5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\4 & -1 & 6\\5 & 1 & 5\end{bmatrix} \quad \text{---}(2)$$

مساوات نمبر 1 اور مساوات نمبر 2 سے ثابت ہوا کہ $(A + B) + C = A + (B + C)$

(ix) $A + (B - C) = (A - C) + B$

حل:

L. H. S. $= A + (B - C)$

$$= \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & -2 & 2\\3 & 1 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1-(-1) & -1-0 & 1-0\\2-0 & -2-(-2) & 2-3\\3-1 & 1-1 & 3-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\2 & 0 & -1\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+2 & 2+(-1) & 3+1\\2+2 & 3+0 & 1+(-1)\\1+2 & -1+0 & 0+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\4 & 3 & 0\\3 & -1 & 1\end{bmatrix} \quad \text{---}(1)$$

R. H. S. $= (A - C) + B$

$$=\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\1&-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&3\\1&1&2\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-(-1)&2-0&3-0\\2-0&3-(-2)&1-3\\1-1&-1-1&0-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&3\\2&5&-2\\0&-2&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+1&2+(-1)&3+1\\2+2&5+(-2)&-2+2\\0+3&-2+1&-2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&4\\4&3&0\\3&-1&1\end{bmatrix}__(2)$$

مساوات نمبر 1 اور مساوات نمبر 2 سے ثابت ہوا کہ $A+(B-C)=(A-C)+B$

(x) $2A+2B=2(A+B)$

حل:

L. H. S. $=2A+2B$

$$=2\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\1&-1&0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&6\\4&6&2\\2&-2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-2&2\\4&-4&4\\6&2&6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+2&4+(-2)&6+2\\4+4&6+(-4)&2+4\\2+6&-2+2&0+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&8\\8&2&6\\8&0&6\end{bmatrix}__(1)$$

R. H. S. $=2(A+B)$

$$=2\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\1&-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&1&3\end{bmatrix}\right)=2\left(\begin{bmatrix}1+1&2+(-1)&3+1\\2+2&3+(-2)&1+2\\1+3&-1+1&0+3\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}2&1&4\\4&1&3\\4&0&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&2&8\\8&2&6\\8&0&6\end{bmatrix}__(2)$$

مساوات نمبر 1 اور مساوات نمبر 2 سے ثابت ہوا کہ $2A+2B=2(A+B)$

-6 اگر $A=\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}0&7\\-3&8\end{bmatrix}$ ہو تو معلوم کیجیے۔

(i) $3A-2B$ (ii) $2A^t-3B^t$

(i) $3A-2B$

حل:

$$=3\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0&7\\-3&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-6\\9&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&14\\-6&16\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3-0&-6-14\\9-(-6)&12-16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-20\\15&-4\end{bmatrix}$$

(ii) $2A^t-3B^t$

حل:

$$A=\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix},\quad A'=\begin{bmatrix}1&3\\-2&4\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0&7\\-3&8\end{bmatrix},\quad B'=\begin{bmatrix}0&-3\\7&8\end{bmatrix}$$

$$2A'-3B'=2\begin{bmatrix}1&3\\-2&4\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0&-3\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&6\\-4&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-9\\21&24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2-0&6-(-9)\\-4-21&8-24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&15\\-25&-16\end{bmatrix}$$

-7 اگر $2\begin{bmatrix}2&4\\-3&a\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1&b\\8&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&10\\18&1\end{bmatrix}$ تو ارکان a اور b کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:

$$2\begin{bmatrix}2&4\\-3&a\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1&b\\8&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&10\\18&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4&8\\-6&2a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&3b\\24&-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&10\\18&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4+3&8+3b\\-6+24&2a-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&10\\18&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}7&8+3b\\18&2a-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&10\\18&1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad 8+3b=10$ اور $2a-12=1$

$3b=10-8 \qquad 2a=1+12$

$3b=2 \qquad 2a=13$

$b=\frac{2}{3} \qquad a=\frac{13}{2}$

-8 اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}$ ہو تو درج ذیل کی تصدیق کیجیے۔

(i) $(A+B)^t=A^t+B^t$

حل:

L.H.S $=(A+B)^t$

اب

$$A+B=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&2+1\\0+2&1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\2&1\end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$(A+B)^t=\begin{bmatrix}2&3\\2&1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}2&2\\3&1\end{bmatrix}\text{---}(1)$$

R. H. S. $=A^t+B^t$

اب

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow A'=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$$ اور $$B=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}\Rightarrow B'=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$A^t+B^t=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&0+2\\2+1&1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\3&1\end{bmatrix}\text{---}(2)$$

مساوات نمبر (1) اور مساوات نمبر (2) سے ثابت ہوا کہ

$$(A+B)^t=A^t+B^t$$

(ii) $(A-B)^t = A^t - B^t$

L. H. S. $= (A-B)^t$

اب $A-B = \begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1&2-1\\0-2&1-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&1\end{bmatrix}$

چنانچہ $(A-B)^t = \begin{bmatrix}0&1\\-2&1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}0&-2\\1&1\end{bmatrix}$ ___(1)

R. H. S. $= A^t - B^t$

اب $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}$

چنانچہ $A^t-B^t = \begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1&0-2\\2-1&1-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2\\1&1\end{bmatrix}$ ___(2)

مساوات نمبر (1) اور مساوات نمبر (2) سے ثابت ہوا کہ $(A-B)^t = A^t - B^t$

(iii) $A + A^t$ ایک سیمٹرک قالب ہے۔

حل: ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$(A+A^t)^t = A + A^t$

اب $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$

چنانچہ $A+A^t=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&2+0\\0+2&1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$

اب $(A+A^t)^t=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$

پس ثابت ہوا کہ $(A+A^t)^t = A + A^t$

(iv) $A - A^t$ ایک سکیو سیمٹرک قالب ہے۔

حل: ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$(A-A^t)^t = -(A-A^t)$

اب $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$

چنانچہ $A-A^t=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1&2-0\\0-2&1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\-2&0\end{bmatrix}$

$(A-A^t)^t=\begin{bmatrix}0&2\\-2&0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}0&-2\\2&0\end{bmatrix}$

اب $(A-A^t)^t=\begin{bmatrix}0&-2\\2&0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0&2\\-2&0\end{bmatrix}$

پس ثابت ہوا کہ

$(A-A^t)^t = -(A-A^t)$

(v) $B + B^t$ ایک سمٹرک قالب ہے۔

حل: ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$(B+B^t)^t = B + B^t$$

اب

$$B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$B + B^t = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+1 & 1+2\\ 2+1 & 0+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

اب

$$(B + B^t)^t = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 0\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

پس ثابت ہوا کہ

$$(B+B^t)^t = B + B^t$$

(vi) $B - B^t$ ایک سکیو سمٹرک قالب ہے۔

حل: ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$(B-B^t)^t = -(B - B^t)$$

اب

$$B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$B - B^t = = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-1 & 1-2\\ 2-1 & 0-0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

اب

$$(B - B^t)^t = = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

پس ثابت ہوا کہ

$$(B - B^t)^t = -(B - B^t)$$

قالبوں کی ضرب:

1- قالبوں کی خاصیت تلازم بلحاظ ضرب $(AB)\,C = A(BC)$

2- قالبوں کی جمع اور تفریق پر ضرب کے تقسیمی قوانین

$A(B \pm C) = AB \pm AC$ (بایاں تقسیمی قانون)

$(A \pm B)\,C = AC \pm BC$ (دایاں تقسیمی قانون)

3- قالبوں کا ضربی قانون مبادلہ $AB=BA$

عام طور پر قالبوں کا ضربی قانون مبادلہ لاگو نہیں ہوتا یعنی $AB \neq BA$ لیکن خاص طور پر اگر وتری قالب ہوں تو $AB=BA$ لاگو ہوتا ہے۔

4- ضربی ذاتی قالب $AB=A=BA$

5- ٹرانسپوز قانون $(AB)^t = B^tA^t$

حل مشق 1.4

-1 کیا درج ذیل ضربی حاصل قالب ممکن ہے یا نہیں؟

(i) $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\\-1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\\-2 & 3\end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}_{(2,2)}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}_{(2,1)}$

حل: ضربی حاصل قالب ممکن ہے کیونکہ پہلے قالب کے کالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہے۔

(ii) $\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}_{(2,2)}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}_{(2,2)}$

حل: ضربی حاصل قالب ممکن ہے کیونکہ پہلے قالب کے کالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہے۔

(iii) $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}_{(2,1)}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}_{(2,2)}$

حل: ضربی حاصل قالب ممکن نہیں ہے کیونکہ پہلے قالب کے کالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر نہیں ہے۔

(iv) $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\\-1 & -2\end{bmatrix}_{(3,2)}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}_{(2,3)}$

حل: ضربی حاصل قالب ممکن ہے کیونکہ پہلے قالب کے کالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہے۔

(v) $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}_{(2,3)}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\\-2 & 3\end{bmatrix}_{(3,2)}$

حل: ضربی حاصل قالب ممکن ہے کیونکہ پہلے قالب کے کالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہے۔

-2 اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$ ہو تو (i) AB اور (ii) BA معلوم کیجیے۔

حل:

(i) $$AB=\begin{bmatrix}3 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times6+0\times5\\-1\times6+2\times5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18+0\\-6+10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\4\end{bmatrix}$$

حل:

(ii) $$BA=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

ضربی حاصل قالب ممکن نہیں ہے کیونکہ پہلے قالب کے کالموں کی تعداد دوسرے قالب کی قطاروں کی تعداد کے برابر نہیں ہے۔

-3 مندرجہ ذیل ضربی حاصل معلوم کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$

حل: $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times4+2\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-4\end{bmatrix}$

حل: $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times5+2\times(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix}-3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$

حل: $\begin{bmatrix}-3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\times4+0\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12\end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix}6 & -0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$

حل: $\begin{bmatrix}6 & -0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\times4+(-0)\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & 0\\6 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\0 & -4\end{bmatrix}$

حل: $\begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & 0\\6 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\0 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times4+2\times0 & 1\times5+2\times(-4)\\(-3)\times4+0\times0 & (-3)\times5+0\times(-4)\\6\times4+(-1)\times0 & 6\times5+(-1)\times(-4)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4+0 & 5-8\\-12+0 & -15+0\\24+0 & 30+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3\\-12 & -15\\24 & 34\end{bmatrix}$

-4 مندرجہ ذیل کا ضربی حاصل معلوم کیجیے۔

(a) $\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 0\end{bmatrix}$

حل: $\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times2+3\times3 & 2\times(-1)+3\times0\\1\times2+1\times3 & 1\times(-1)+1\times0\\0\times2+(-2)\times3 & 0\times(-1)+(-2)\times0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4+9 & -2+0\\2+3 & -1+0\\0-6 & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & -2\\5 & -1\\-6 & 0\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\-1 & 1\end{bmatrix}$

حل:
$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+2\times3+3\times(-1) & 1\times2+2\times4+3\times1\\4\times1+5\times3+6\times(-1) & 4\times2+5\times4+6\times1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1+6-3 & 2+8+3\\4+15-6 & 8+20+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 13\\13 & 34\end{bmatrix}$$

(c) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$

حل:
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+2\times4 & 1\times2+2\times5 & 1\times3+2\times6\\3\times1+4\times4 & 3\times2+4\times5 & 3\times3+4\times6\\(-1)\times1+1\times4 & (-1)\times2+1\times5 & (-1)\times3+1\times6\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1+8 & 2+10 & 3+12\\3+16 & 6+20 & 9+24\\-1+4 & -2+5 & -3+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 12 & 15\\19 & 26 & 33\\3 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

(d) $\begin{bmatrix}8 & 5\\6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -5/2\\-4 & 4\end{bmatrix}$

حل:
$$\begin{bmatrix}8 & 5\\6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -\frac{5}{2}\\-4 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\times2+5\times(-4) & 8\times\left(-\frac{5}{2}\right)+5\times4\\6\times2+4\times(-4) & 6\times\left(-\frac{5}{2}\right)+4\times4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}16-20 & -20+20\\12-16 & -15+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\-4 & 1\end{bmatrix}$$

(e) $\begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

حل:
$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)\times0+2\times0 & (-1)\times0+2\times0\\1\times0+3\times0 & 1\times0+3\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+0 & 0+0\\0+0 & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

5- اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & -5\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$ ہو تو درج ذیل کی تصدیق کیجیے (اگر ممکن ہو)۔

(i) $AB = BA$

حل:

L. H. S. = AB
$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)\times1+3\times(-3) & (-1)\times2+3\times(-5)\\2\times1+0\times(-3) & 2\times2+0\times(-5)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-1-9 & -2-15\\2+0 & 4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & -17\\2 & 4\end{bmatrix}\text{——(1)}$$

R.H.S. = BA

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times(-1)+2\times2 & 1\times3+2\times0\\ (-3)\times(-1)+(-5)\times2 & (-3)\times3+(-5)\times0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1+4 & 3+0\\ 3-10 & -9+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ -7 & -9\end{bmatrix}\text{——}(2)$$

مساوات نمبر (1) اور مساوات نمبر (2) سے ثابت ہوا کہ $AB \neq BA$

(ii) A(BC) = (AB) C

حل: L.H.S.= A (BC)

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\times2+2\times1 & 1\times1+2\times3\\ (-3)\times2+(-5)\times1 & (-3)\times1+(-5)\times3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2+2 & 1+6\\ -6-5 & -3-15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 7\\ -11 & -18\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(-1)\times4+3\times(-11) & (-1)\times7+3\times(-18)\\ 2\times4+0\times(-11) & 2\times7+0\times(-18)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4-33 & -7-54\\ 8+0 & 14+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-37 & -61\\ 8 & 14\end{bmatrix}\text{——}(1)$$

R.H.S. = (AB) C

$$=\left(\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)\times1+3\times(-3) & (-1)\times2+3\times(-5)\\ 2\times1+0\times(-3) & 2\times2+0\times(-5)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1-9 & -2-15\\ 2+0 & 4+0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & -17\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-10)\times2+(-17)\times1 & (-10)\times1+(-17)\times3\\ 2\times2+4\times1 & 2\times1+4\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20-17 & -10-51\\ 4+4 & 2+12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-37 & -61\\ 8 & 14\end{bmatrix}\text{——}(2)$$

مساوات نمبر (1) اور مساوات نمبر (2) سے ثابت ہوا کہ A (BC) = (AB) C

(iii) A (B + C) = AB + AC

حل: L.H.S. = A (B + C)

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+2 & 2+1\\ -3+1 & -5+3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 3\\ -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)\times3+3\times(-2) & (-1)\times3+3\times(-2)\\ 2\times3+0\times(-2) & 2\times3+0\times(-2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3-6 & -3-6\\ 6-0 & 6-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -9\\ 6 & 6\end{bmatrix}\text{——}(1)$$

R.H.S. = AB + AC

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-1)\times1+3\times(-3) & (-1)\times2+3\times(-5)\\ 2\times1+0\times(-3) & 2\times2+0\times(-5)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(-1)\times2+3\times1 & (-1)\times1+3\times3\\ 2\times2+0\times1 & 2\times1+0\times3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1-9 & -2-15\\2+0 & 4+0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2+3 & -1+9\\4+0 & 2+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-10 & -17\\2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 8\\4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10+1 & -17+8\\2+4 & 4+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -9\\6 & 6\end{bmatrix} \text{——}(2)$$

مساوات نمبر (1) اور مساوات نمبر (2) سے ثابت ہوا کہ $A(B+C)=AB+AC$

(iv) $A(B-C)=AB-AC$

L. H. S. $=A(B-C)$

حل:

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & -5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-2 & 2-1\\-3-1 & -5-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\-4 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)\times(-1)+3\times(-4) & (-1)\times1+3\times(-8)\\2\times(-1)+0\times(-4) & 2\times1+0\times(-8)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-12 & -1-24\\-2-0 & 2-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11 & -25\\-2 & 2\end{bmatrix} \text{——}(1)$$

R.H.S.$=AB-AC$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & -5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-1)\times1+3\times(-3) & (-1)\times2+3\times(-5)\\2\times1+0\times(-3) & 2\times2+0\times(-5)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}(-1)\times2+3\times1 & (-1)\times1+3\times3\\2\times2+0\times1 & 2\times1+0\times3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1-9 & -2-15\\2+0 & 4+0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2+3 & -1+9\\4+0 & 2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & -17\\2 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 8\\4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-10-1 & -17-8\\2-4 & 4-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11 & -25\\-2 & 2\end{bmatrix} \text{——}(2)$$

مساوات نمبر (1) اور مساوات نمبر (2) سے ثابت ہوا کہ $A(B-C)=AB-AC$

-6 قالبوں $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & -5\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}-2 & 6\\3 & -9\end{bmatrix}$ کی مدد سے درج ذیل کی تصدیق کیجیے۔

(i) $(AB)^t=B^tA^t$

حل:

L.H.S. $=(AB)^t$

اب

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\-3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)\times1+3\times(-3) & (-1)\times2+3(-5)\\2\times1+0\times(-3) & 2\times2+0\times(-5)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1-9 & -2-15\\2+0 & 4-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & -17\\2 & 4\end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$(AB)^t=\begin{bmatrix}-10 & -17\\2 & 4\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}-10 & 2\\-17 & 4\end{bmatrix} \text{——}(1)$$

R.H.S. $=B^tA^t$

اب

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & 0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -5\end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$B^tA^t=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times(-1)+(-3)\times3 & 1\times2+(-3)\times0\\ 2\times(-1)+(-5)\times3 & 2\times2+(-5)\times0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1-9 & 2+0\\ -2-15 & 4-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 2\\ -17 & 4\end{bmatrix}\text{——}(2)$$

مساوات نمبر (1) اور مساوات نمبر (2) سے ثابت ہوا کہ $(AB)^t=B^tA^t$

(ii) $(BC)^t=C^tB^t$

حل:

L.H.S. $=(BC)^t$

$$BC=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 3 & -9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times(-2)+2\times3 & 1\times6+2\times(-9)\\ (-3)\times(-2)+(-5)\times3 & (-3)\times6+(-5)\times(-9)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2+6 & 6-18\\ 6-15 & -18+45\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -12\\ -9 & 27\end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$(BC)^t=\begin{bmatrix}4 & -12\\ -9 & 27\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}4 & -9\\ -12 & 27\end{bmatrix}\text{——}(1)$$

R.H.S. $=C^tB^t$

اب

$$C=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 3 & -9\end{bmatrix}\Rightarrow C^t=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 3 & -9\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 6 & -9\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -5\end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$C^tB^t=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 6 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-2)\times1+3\times2 & (-2)\times(-3)+3\times(-5)\\ 6\times1+(-9)\times2 & 6\times(-3)+(-9)\times(-5)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2+6 & 6-15\\ 6-18 & -18+45\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -9\\ -12 & 27\end{bmatrix}\text{——}(2)$$

مساوات نمبر (1) اور مساوات نمبر (2) سے ثابت ہوا کہ $(BC)^t=C^tB^t$

قالب کا ضربی معکوس:

-1 قالب کا مقطع: اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ تو

$$|A|=\det A=\det\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

-2 قالب کا ایڈ جائنٹ

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ تو $\text{Adj }A=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

-3 غیر نادر قالب کا ضربی معکوس

اگر دو غیر نادر قالب A اور B ہم مرتبہ مربعی قالب ہوں تو $AB = BA = I$

اور اگر $B = A^{-1}$ تو $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

4- ایڈ جائنٹ کی مدد سے قالب کا ضربی معکوس

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ہو تو $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{|A|}$

حل مشق 1.5

1- درج ذیل قالبوں کے مقطع معلوم کیجیے۔

(i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

حل: $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) - (1)(2) = 0 - 2 = -2$

(ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

حل: $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-2) - (3)(2) = -2 - 6 = -8$

(iii) $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

حل: $|C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (3)(2) = 6 - 6 = 0$

(iv) $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

حل: $|D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (3)(4) - (2)(1) = 12 - 2 = 10$

2- نیچے دیے ہوئے قالبوں میں سے کون سے نادر ہیں اور کون سے غیر نادر؟ الگ الگ کیجیے۔

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

حل: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (3)(4) - (2)(6) = 12 - 12 = 0$

پس قالب A نادر قالب ہے۔

(ii) $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

حل: $|B| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (1)(3) = 8 - 3 = 5 \neq 0$

پس قالب B غیر نادر قالب ہے۔

(iii) $C=\begin{bmatrix}7 & -9\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

حل: $|C|=\begin{vmatrix}7 & -9\\ 3 & 5\end{vmatrix}=(7)(5)-(3)(-9)=35+27=62\neq 0$

پس قالب C غیر نادر قالب ہے۔

(iv) $D=\begin{bmatrix}5 & -10\\ -2 & 4\end{bmatrix}$

حل: $|D|=\begin{vmatrix}5 & -10\\ -2 & 4\end{vmatrix}=(5)(4)-(-10)(-2)=20-20=0$

پس قالب D نادر قالب ہے۔

3- پیچھے دیے ہوئے قالبوں کے ضربی معکوس معلوم کیجیے (اگر ممکن ہو)۔

(i) $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

حل: $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=(-1)(0)-(3)(2)=0-6=-6$

$\text{Adj } A=\begin{bmatrix}0 & -3\\ -2 & -1\end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix}0 & -3\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{0}{-6} & \frac{-3}{-6}\\ \frac{-2}{-6} & \frac{-1}{-6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

(ii) $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}$

حل: $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{vmatrix}=(1)(-5)-(2)(-3)=-5+6=1$

$\text{Adj } B=\begin{bmatrix}-5 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}AdjB=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}-5 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

(iii) $C=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 3 & -9\end{bmatrix}$

حل: $C=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 3 & -9\end{bmatrix}\Rightarrow |C|=\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 3 & -9\end{vmatrix}=(-2)(-9)-(6)(3)=18-18=0$

پس C^{-1} ممکن نہیں ہے۔

(iv) $D=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

حل: $D=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow |D|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ 1 & 2\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)(2)-(1)\left(\frac{3}{4}\right)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$$AdjD=\begin{bmatrix}2 & -\frac{3}{4}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}AdjD=\frac{1}{\frac{1}{4}}\begin{bmatrix}2 & -\frac{3}{4}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}2 & -\frac{3}{4}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -3\\ -4 & 2\end{bmatrix}$$

4- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ تو درج ذیل کی تصدیق کیجیے۔

(i) A (Adj A) = (Adj A) A = (det A)I

حل:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{vmatrix}=(1)(6)-(2)(4)=6-8=-2$$

$$AdjA=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

اب

$$A(AdjA)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2\\ -4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times6+2\times(-4) & 1\times(-2)+2\times1\\ 4\times6+6\times(-4) & 4\times(-2)+6\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6-8 & -2+2\\ 24-24 & -8+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\text{——(1)}$$

$$(Adj A)A=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\times1+(-2)\times4 & 6\times2+(-2)\times6\\ (-4)\times1+1\times4 & (-4)\times2+1\times6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6-8 & 12-12\\ -4+4 & -8+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\text{——(2)}$$

$$(\det A)I=-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\text{——(3)}$$

مساوات نمبر (1)، (2) اور (3) سے ثابت ہوا کہ

A (Adj A) = (Adj A) A = (det A) I

(ii) $BB^{-1}=I=B^{-1}B$

حل:

$$B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=(3)(-2)-(-1)(2)=-6+2=-4$$

$$Adj\,B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}Adj\,B=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

اب

$$BB^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\times(-2)+(-1)\times(-2) & 3\times1+(-1)\times3\\ 2\times(-2)+(-2)\times(-2) & 2\times1+(-2)\times3\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-6+2 & 3-3\\ -4+4 & 2-6\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{-4} & -\frac{0}{4} \\ -\frac{0}{4} & \frac{-4}{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B^{-1}B = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-2)\times 3+1\times 2 & (-2)\times(-1)+1\times(-2) \\ (-2)\times 3+3\times 2 & (-2)\times(-1)+3\times(-2) \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -6+2 & 2-2 \\ -6+6 & 2-6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{-4} & \frac{0}{-4} \\ \frac{0}{-4} & \frac{-4}{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

پس ثابت ہوا کہ $B B^{-1} = I = B^{-1}B$

-5 قالبوں کے جوڑوں میں سے ثابت کیجیے کہ ہر ایک قالب دوسرے قالب کا ضربی معکوس ہے یا نہیں۔

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

حل:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 7+5\times(-4) & 3\times(-5)+5\times 3 \\ 4\times 7+7\times(-4) & 4\times(-5)+7\times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21-20 & -15+15 \\ 28-28 & -20+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دیئے گئے قالب ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

حل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times(-3)+2\times 2 & 1\times 2+2\times(-1) \\ 2\times(-3)+3\times 2 & 2\times 2+3\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & 2-2 \\ -6+6 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دیئے گئے قالب ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

-6 اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ اور $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ تو تصدیق کیجیے کہ

(i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

حل:

L.H.S. $= (AB)^{-1}$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times(-4)+0\times 1 & 4\times(-2)+0\times(-1) \\ (-1)\times(-4)+2\times 1 & (-1)\times(-2)+2\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16+0 & -8+0 \\ +4+2 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -8 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = (-16)(0)-(-8)(6) = 0+48 = 48$$

$$\text{Adj}(AB) = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -6 & -16 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\,Adj\ (AB) = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -6 & -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0}{48} & \frac{8}{48} \\ \frac{-6}{48} & \frac{-16}{48} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{——(1)}$$

R.H.S.= $B^{-1}A^{-1}$

$$B=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=(-4)(-1)-(1)(-2)=4+2=6$$

$$Adj\ B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -4\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}Adj\ B=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -4\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=(4)(2)-(0)(-1)=8-0=8$$

$$Adj\ A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -4\end{bmatrix}\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\frac{1}{48}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{48}\begin{bmatrix}(-1)\times 2+2\times 1 & (-1)\times 0+2\times 4\\ (-1)\times 2+(-4)\times 1 & (-1)\times 0+(-4)\times 4\end{bmatrix}=\frac{1}{48}\begin{bmatrix}-2+2 & 0+8\\ -2-4 & 0-16\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{48}\begin{bmatrix}0 & 8\\ -6 & -16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{0}{48} & \frac{8}{48}\\ \frac{-6}{48} & \frac{-16}{48}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\text{——(2)}$$

مساوات نمبر (1) اور مساوات نمبر (2) سے ثابت ہوا کہ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(ii) $(DA)^{-1}=A^{-1}D^{-1}$

L.H.S.= $(DA)^{-1}$

اب

$$DA=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times 4+1\times(-1) & 3\times 0+1\times 2\\ (-2)\times 4+2\times(-1) & (-2)\times 0+2\times 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12-1 & 0+2\\ -8-2 & 0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 2\\ -10 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow |DA|=\begin{vmatrix}11 & 2\\ -10 & 4\end{vmatrix}=(11)(4)-(2)(-10)=44+20=64$$

$$Adj\,DA=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 10 & 11\end{bmatrix}\Rightarrow (DA)^{-1}=\frac{1}{|DA|}Adj\,DA$$

$$=\frac{1}{64}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 10 & 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{64} & \frac{-2}{64}\\ \frac{10}{64} & \frac{11}{64}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{16} & -\frac{1}{32}\\ \frac{5}{32} & \frac{11}{64}\end{bmatrix}\text{——(1)}$$

R.H.S. = $A^{-1}D^{-1}$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=(4)(2)-(-1)(0)=8+0=8$$

$$Adj\,A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2)-(1)(-2) = 6+2 = 8$$

$$\text{Adj}D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \frac{1}{|D|}\text{Adj}D = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

اب

$$A^{-1}D^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 2\times2+0\times2 & 2\times(-1)+0\times3 \\ 1\times2+4\times2 & 1\times(-1)+4\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 4+0 & -2+0 \\ 2+8 & -1+12 \end{bmatrix} = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{64} & \frac{-2}{64} \\ \frac{10}{64} & \frac{11}{64} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & -\frac{1}{32} \\ \frac{5}{32} & \frac{11}{64} \end{bmatrix} \quad \text{—(2)}$$

مساوات نمبر(1) اور مساوات نمبر(2) سے ثابت ہوا کہ $(DA)^{-1} = A^{-1}D^{-1}$

دو ہمزاد مساواتوں کا حل:

1- مساواتوں کے قالب کے معکوس کے طریقہ سے 2- کریمر کے قانون کی مدد سے

حل مشق 1.6

6- قالبوں کی مدد سے اگر ممکن ہو تو دی ہوئی لینئر مساواتوں کے جوڑوں میں متغیرات x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے (ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

(i) $2x - 2y = 4$
$3x + 2y = 6$

حل: (i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

$$2x - 2y = 4$$
$$3x + 2y = 6$$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

اب

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj\ A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2)-(3)(-2) = 4+6 = 10$$

$$AdjA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2\times4+2\times6 \\ (-3)\times4+2\times6 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8+12 \\ -12+12 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{10} \\ \frac{0}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x = 2, y = 0$

(ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

$2x - 2y = 4$
$3x + 2y = 6$

اگر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (-2)(3) = 4 + 6 = 10$$

$$A_x = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_x| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (-2)(6) = 8 + 12 = 20$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (2)(6) - (3)(4) = 12 - 12 = 0$$

اب

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{20}{10} = 2$$

اور

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{0}{10} = 0$$

(ii) $2x + y = 3$
$6x + 5y = 1$

حل: (i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

$2x + y = 3$
$6x + 5y = 1$

یہاں

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

اب

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (1)(6) = 10 - 6 = 4$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5\times3+(-1)\times1 \\ (-6)\times3+2\times1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 15-1 \\ -18+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 14 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{14}{4} \\ \frac{-16}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{7}{2}, y = -4$$

(ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

$2x + y = 3$
$6x + 5y = 1$

اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 6 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 6 & 5\end{vmatrix}=(2)(5)-(1)(6)=10-6=4$

$A_x=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow |A_x|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=(3)(5)-(1)(1)=15-1=14$

$A_y=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 6 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |A_y|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 1\end{vmatrix}=(2)(1)-(3)(6)=2-18=-16$

اب $x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=\dfrac{14}{4}=\dfrac{7}{2}$

اور $y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=\dfrac{-16}{4}=-4$

(iii) $4x+2y=8$

$3x-y=-1$

حل: (i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

$4x+2y=8$

$3x-y=-1$

یہاں $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}8\\ -1\end{bmatrix}$

چنانچہ $AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$

اور $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}Adj\ A$

$|A|=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=(4)(-1)-(2)(3)=-4-6=-10$

$Adj\ A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{-10}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$

چنانچہ $X=A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ -1\end{bmatrix}=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix}(-1)\times 8+(-2)\times(-1)\\ (-3)\times 8+4\times(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix}-8+2\\ -24-4\end{bmatrix}=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix}-6\\ -28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-6}{-10}\\ \frac{-28}{-10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{14}{5}\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x=\dfrac{3}{5}, \qquad y=\dfrac{14}{5}$

(ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

$4x+2y=8$

$3x-y=-1$

یہاں $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=(4)(-1)-(+2)(3)=-4-6=-10$

$A_x=\begin{bmatrix}8 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow |A_x|=\begin{vmatrix}8 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=(8)(-1)-(+2)(-1)=-8+2=-6$

$$A_y = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_y| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (4)(-1) - (3)(8) = -4 - 24 = -28$$

اب
$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$$

اور
$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-28}{-10} = \frac{14}{5}$$

(iv) $3x - 2y = -6$
$5x - 2y = -10$

حل: (i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

$$3x - 2y = -6$$
$$5x - 2y = -10$$

یہاں
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

چنانچہ
$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

اور
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\, A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (5)(-2) = -6 + 10 = 4$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

چنانچہ
$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 \\ -10 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-2)\times(-6) + 2\times(-10) \\ (-5)\times(-6) + 3\times(-10) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 12 - 20 \\ +30 - 30 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-8}{4} \\ \frac{0}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = -2, y = 0$$

(ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

$$3x - 2y = -6$$
$$5x - 2y = -10$$

اگر
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (5)(-2) = -6 + 10 = 4$$

$$A_x = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_x| = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = (-6)(-2) - (-10)(-2) = +12 - 20 = -8$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = (3)(-10) - (5)(-6) = -30 + 30 = 0$$

اب
$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-8}{4} = -2$$

اور
$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{0}{4} = 0$$

(v) $3x - 2y = 4$
$-6x + 4y = 7$

حل: (i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

$$3x - 2y = 4$$
$$-6x + 4y = 7$$

یہاں
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

چنانچہ
$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

اور
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A$$

اب
$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = (3)(4) - (-2)(-6) = 12 - 12 = 0$$

چونکہ $|A| = 0$، اس لیے حل ممکن نہیں ہے۔

(vi) $4x + y = 9$
$-3x - y = -5$

حل: (i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

$$4x + y = 9$$
$$-3x - y = -5$$

یہاں
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

چنانچہ
$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

اور
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = (4)(-1) - (-3)(1) = -4 + 3 = -1$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

چنانچہ
$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 9 + 1 \times (-5) \\ (-3) \times 9 + (-4) \times (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - 5 \\ -27 + 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = 4, y = -7$$

(ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

$$4x + y = 9$$
$$-3x - y = -5$$

اگر
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = (4)(-1) - (-3)(1) = -4 + 3 = -1$$

$$A_x = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_x| = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = (9)(-1) - (-5)(1) = -9 + 5 = -4$$

$A_y = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_y| = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = (4)(-5)-(9)(-3) = -20+27 = 7$

اب $x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-4}{-1} = 4$

اور $y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{7}{-1} = -7$

(vii) $2x - 2y = 4$

$-5x - 2y = -10$

حل: (i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

$2x - 2y = 4$

$-5x - 2y = -10$

یہاں $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \end{bmatrix}$

چنانچہ $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

اور $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2)-(-2)(-5) = -4-10 = -14$

$Adj\ A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = A^{-1} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

چنانچہ $X = A^{-1}B$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -10 \end{bmatrix} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} (-2)\times 4 + 2\times(-10) \\ 5\times 4 + 2\times(-10) \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -8-20 \\ 20-20 \end{bmatrix} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -28 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-28}{-14} \\ \frac{0}{-14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad x = 2, y = 0$

(ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

$2x - 2y = 4$

$-5x - 2y = -10$

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2)-(-5)(-2) = -4-10 = -14$

$A_x = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_x| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = (4)(-2)-(-2)(-10) = -8-20 = -28$

$A_y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = (2)(-10)-(+4)(-5) = -20+20 = 0$

اب $x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-28}{-14} = 2$

اور $y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{0}{-14} = 0$

(viii) $3x - 4y = 4$
$x + 2y = 8$

حل: (i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

$$3x - 4y = 4$$
$$x + 2y = 8$$

یہاں $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

چنانچہ $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

اور $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (1)(-4) = 6 + 4 = 10$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

چنانچہ $X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2\times4 + 4\times8 \\ (-1)\times4 + 3\times8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8+32 \\ -4+24 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 40 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{10} \\ \frac{20}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 4, y = 2$$

(ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

$$3x - 4y = 4$$
$$x + 2y = 8$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (1)(-4) = 6 + 4 = 10$

$$A_x = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_x| = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (-4)(8) = 8 + 32 = 40$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (3)(8) - (1)(4) = 24 - 4 = 20$$

اب $x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{40}{10} = 4$

اور $y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{20}{10} = 2$

نیچے دیے ہوئے عملی زندگی کے مسائل کو حل کیجیے۔

(i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے (ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

-2 اگر ایک مستطیل کی لمبائی اس کی چوڑائی سے چار گنا ہو اور اس کا احاطہ 150 سم ہو تو اس مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

حل: اگر مستطیل کی چوڑائی xcm ہو اور مستطیل کی لمبائی y ہو تو:

دی ہوئی شرط کے مطابق

مستطیل کی لمبائی $= y = 4x$

$$4x - y = 0 \quad \text{———— (1)}$$

اب

مستطیل کا احاطہ $= 150$

$\therefore$ (2(لمبائی + چوڑائی) = احاطہ)

$$2(x + y) = 150$$

$$x + y = 75 \quad \text{———— (2)}$$

(i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

$$4x - y = 0 \quad \text{—— (1)}$$
$$x + y = 75 \quad \text{—— (2)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 75 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

اور

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (1)(-1) = 4 + 1 = 5$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 75 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1\times 0 + 1\times 75 \\ (-1)\times 0 + 4\times 75 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0+75 \\ 0+300 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 75 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{75}{5} \\ \frac{300}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 60 \end{bmatrix}$$

مستطیل کی لمبائی $= x = 15$ cm

مستطیل کی چوڑائی $= y = 60$ cm

(ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

$$4x - y = 0$$
$$x + y = 75$$

اگر

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (-1)(1) = 4 + 1 = 5$$

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 75 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_x| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 75 & 1 \end{vmatrix} = (0)(1) - (-1)(75) = 0 + 75 = 75$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 75 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_y| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 75 \end{vmatrix} = (4)(75) - (0)(1) = 300 - 0 = 300$$

اب $x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{75}{5} = 15$

اور $y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{300}{5} = 60$

مستطیل کی لمبائی $= x = 15\ cm$

مستطیل کی چوڑائی $= y = 60\ cm$

3- ایک مستطیل کے دو اضلاع کی لمبائی میں 3.5 سم کا فرق ہے۔ ان دونوں اضلاع کی لمبائی معلوم کیجیے جبکہ مستطیل کا احاطہ 67 سم ہو۔

حل:

فرض کیا مستطیل کی لمبائی $= x\ cm$

فرض کیا مستطیل کی چوڑائی $= y\ cm$

دی گئی شرط کے مطابق

$x - y = 3.5$ ______ (1)

احاطہ $= 67$

اب

$2(x + y) = 67$

$\Rightarrow x + y = 33.5$ ______ (2)

(i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 33.5 \end{bmatrix}$$

چنانچہ $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

اور $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (-1)(1) = 1 + 1 = 2$$

اب $Adj\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

چنانچہ $X = A^{-1}B$

چنانچہ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3.5 \\ 33.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \times 3.5 + 1 \times 33.5 \\ (-1) \times 3.5 + 1 \times 33.5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3.5 + 33.5 \\ -3.5 + 33.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 37 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{2} \\ \frac{30}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

مستطیل کی لمبائی $= x = 18.5\ cm$

مستطیل کی چوڑائی $= y = 15\ cm$

(ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

$x - y = 3.5$

$x + y = 33.5$

اگر
$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(1)(1)-(-1)(1)=1+1=2$$

$$A_x=\begin{bmatrix}3.5 & -1\\ 33.5 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |A_x|=\begin{vmatrix}3.5 & -1\\ 33.5 & 1\end{vmatrix}=(3.5)(1)-(-1)(33.5)=3.5+33.5=37$$

$$A_y=\begin{bmatrix}1 & 3.5\\ 1 & 33.5\end{bmatrix} \Rightarrow |A_y|=\begin{vmatrix}1 & 3.5\\ 1 & 33.5\end{vmatrix}=(1)(33.5)-(-1)(3.5)=33.5-3.5=30$$

اب
$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{37}{2}=18.5cm$$

اور
$$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{30}{2}=15cm$$

4- ایک مساوی الساقین مثلث کا تیسرا زاویہ باقی دو برابر زاویوں کے مجموعہ سے °16 کم ہے۔ مثلث کے تینوں زاویوں کی مقدار معلوم کریں۔

حل: فرض کیا کہ مساوی الساقین مثلث کا پہلا اور دوسرا زاویہ x اور y اور تیسرا زاویہ z ہے۔ چونکہ مثلث مساوی الساقین ہے لہٰذا x=y دی گئی شرط کے مطابق

$$z = (x+x)-16^\circ$$
$$z = 2x-16^\circ$$

یا
$$2x - z = 16^\circ \quad ______ (1)$$

ہم جانتے ہیں کہ

مساوی الساقین مثلث کے زاویوں کا مجموعہ $= 180^\circ$
$$x+y+z=180^\circ$$
$$x+x+z=180^\circ$$
$$2x+z=180^\circ \quad _____ (2)$$

(i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

یہاں
$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}16^\circ\\ 180^\circ\end{bmatrix}$$

چنانچہ
$$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

اور
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=(2)(1)-(2)(-1)=2+2=4$$

$$Adj\ A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B$$

چنانچہ
$$\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16^\circ\\ 180^\circ\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\times16^\circ+1\times180^\circ\\ (-2)\times16^\circ+2\times180^\circ\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}16^{\circ}+180^{\circ}\\-32^{\circ}+360^{\circ}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}196^{\circ}\\328^{\circ}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{196^{\circ}}{4}\\\frac{328^{\circ}}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}49^{\circ}\\82^{\circ}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=49^{\circ}, y=49^{\circ}, z=82^{\circ}$$

(ii) کریمر کے قانون کے مطابق

$$2x-z=16^{\circ}$$
$$2x+z=180^{\circ}$$

اگر

$$A=\begin{bmatrix}2&-1\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}2&-1\\2&1\end{vmatrix}=(2)(1)-(2)(-1)=2+2=4$$

$$A_x=\begin{bmatrix}16^{\circ}&-1\\180^{\circ}&1\end{bmatrix}\Rightarrow |A_x|=\begin{vmatrix}16^{\circ}&-1\\180^{\circ}&1\end{vmatrix}=(16^{\circ})(1)-(-1)(180^{\circ})=16^{\circ}+180^{\circ}=196^{\circ}$$

$$A_z=\begin{bmatrix}2&16^{\circ}\\2&180^{\circ}\end{bmatrix}\Rightarrow |A_z|=\begin{vmatrix}2&16^{\circ}\\2&180^{\circ}\end{vmatrix}=(2)(180^{\circ})-(2)(16^{\circ})=360^{\circ}-32^{\circ}=328^{\circ}$$

اب

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{196^{\circ}}{4}=49^{\circ}$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{328^{\circ}}{4}=82^{\circ}$$

$$\Rightarrow x=49^{\circ},\quad y=49^{\circ},\quad z=82^{\circ}$$

-5 ایک قائمۃ الزاویہ مثلث میں ایک حادہ زاویہ کی مقدار دوسرے حادہ زاویہ کی مقدار کے دوگنا سے 12° زیادہ ہے۔ مثلث کے دونوں حادہ زاویوں کی مقدار معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ x اور y قائمہ زاویہ مثلث کے حادہ زاویے ہیں۔

دی گئی شرط کے مطابق

$$x=2y+12^{\circ}$$

$$x-2y=12^{\circ}\ ______(1)$$

ہم جانتے ہیں کہ

قائمۃ الزاویہ مثلث کے زاویوں کا مجموعہ $=180^{\circ}$

$$x+y+z=180^{\circ}$$
$$x+y+90^{\circ}=180^{\circ}$$
$$x+y=180^{\circ}-90^{\circ}$$
$$x+y=90^{\circ}\ ______(2)$$

(i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

$$A=\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}12^{\circ}\\90^{\circ}\end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

اور

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-2\\1&1\end{vmatrix}=(1)(1)-(1)(-2)=1+2=3$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$X = A^{-1}B$$

چنانچہ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12^o \\ 90^o \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (1)\times(12^o)+(2)\times(90^o) \\ (-1)\times(-12^o)+(1)\times(90^o) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 12^o + 180^o \\ -12^o + 90^o \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 192^o \\ 78^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{192^o}{3} \\ \frac{78^o}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64^o \\ 26^o \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = 64^o, \qquad y = 26^o$$

(ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

$$x - 2y = 12^o$$
$$x + y = 90^o$$

اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1)-(1)(-2) = 1+2 = 3$$

$$A_x = \begin{bmatrix} 12^o & -2 \\ 90^o & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A_x| = \begin{vmatrix} 12^o & -2 \\ 90^o & 1 \end{vmatrix} = (12^o)(1)-(-2)(90^o) = 12^o + 180^o = 192^o$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 12^o \\ 1 & 90^o \end{bmatrix} \Rightarrow |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 12^o \\ 1 & 90^o \end{vmatrix} = (1)(90^o)-(1)(12^o) = 90^o - 12^o = 78^o$$

اب

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{192^o}{3} = 64^o$$

اور

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{78^o}{3} = 26^o$$

-6 دو کاریں سفر کے دوران ایک دوسرے سے 600km فاصلہ پر ہیں اور ایک دوسری کی مخالف سمت میں سفر کر رہی ہیں۔ اگر ان کی رفتار میں 6km فی گھنٹا کا فرق ہو اور 4½ گھنٹے کے سفر کے بعد ان کے درمیان فاصلہ 123km رہ جائے تو ہر کار کی رفتار معلوم کیجیے۔

حل:

فرض کیا کہ پہلی کار کی رفتار $= x$ km/hr

فرض کیا کہ دوسری کار کی رفتار $= y$ km/hr

رفتاروں کا فرق $= x - y = 6$ ....(i)

وقت = $4\frac{1}{2}$ گھنٹے = $\frac{9}{2}$ گھنٹے

فاصلہ = رفتار × وقت

$$(x)\left(\frac{9}{2}\right) + 123 + (y)\left(\frac{9}{2}\right) = 600$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{9y}{2} = 600 - 123$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{9y}{2} = 477$$

دونوں اطراف کو "2" سے ضرب دینے سے

$$2\times\left(\frac{9x}{2}+\frac{9y}{2}\right)=477\times2$$

$$2\times\frac{9x}{2}+2\times\frac{9y}{2}=954$$

$$9x+9y=954$$

دونوں اطراف کو "9" سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{9x+9y}{9}=\frac{954}{9}$$

$$\frac{9x}{9}+\frac{9y}{9}=\frac{954}{9}$$

$$x+y=106 \quad \text{---------} \ (ii)$$

(i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

$$x-y=6$$
$$x+y=106$$

قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\106\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}=(1)(1)-(1)(-1)=1+1=2$$

$$Adj.\ A=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$A^{-1}=\frac{AdjA}{|A|}$$

اور

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\106\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\times6+1\times106\\-1\times6+1\times106\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6+106\\-6+106\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}112\\100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{112}{2}\\\frac{100}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}56\\50\end{bmatrix}$$

قالبوں کی برابری کی مدد سے

پہلی کار کی رفتار = 56 کلومیٹر فی گھنٹہ ، دوسری کار کی رفتار = 50 کلومیٹر فی گھنٹہ

(ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

$$x-y=6 \quad \text{---------}(i)$$
$$x+y=106 \quad \text{---------}(ii)$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\106\end{bmatrix}$$

$$AX=B$$

جبکہ

قالبوں کی شکل میں اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$ اور $$B=\begin{bmatrix}6\\106\end{bmatrix}$$

اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(1)(1)-(1)(-1)=1+1=2$

$A_x=\begin{bmatrix}6 & -1\\ 106 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |A_x|=\begin{vmatrix}6 & -1\\ 106 & 1\end{vmatrix}=(6)(1)-(-1)(106)=6+106=112$

$A_y=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 1 & 106\end{bmatrix} \Rightarrow |A_y|=\begin{vmatrix}1 & 6\\ 1 & 106\end{vmatrix}=(1)(106)-(6)(1)=106-6=100$

اب

$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{112}{2}=56\text{km/h}$

اور

$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{100}{2}=50\text{ km/h}$

پس ہر ایک کار کی رفتار 56 کلومیٹر فی گھنٹا اور 50 کلومیٹر فی گھنٹا ہے۔

حل اعادہ مشق 1

-1 درج ذیل کے درست جوابات کا انتخاب کیجیے۔

(i) قالب [1 2] کا درجہ .... ہے۔

(a) 2-by-1 (b) 1-by-2 (c) 1-by-1 (d) 2-by-2

(ii) $\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ کو .... قالب کہا جاتا ہے۔

(a) صفری (b) سکیلر (c) وحدانی (d) نادر

(iii) کون سا درجہ ایک مربعی قالب کا ہے............؟

(a) 2-by-2 (b) 1-by-2 (c) 2-by-1 (d) 3-by-2

(iv) قالب $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ کے ٹرانسپوز قالب کا درجہ ہے۔ ....

(a) 3-by-2 (b) 2-by-3 (c) 3-by-1 (d) 1-by-3

(v) Adj $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ برابر ہے۔............

(a) $\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

(vi) ضربی حاصل $\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$ برابر ہے۔

(a) $[2x+y]$ (b) $[x-2y]$ (c) $[2x-y]$ (d) $[x+2y]$

(vii) اگر $\begin{vmatrix}2 & 6\\ 3 & x\end{vmatrix}=0$ ہو تو x برابر ہے۔............

(a) 9 (b) -6 (c) 6 (d) -9

(viii) اگر $X+\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ تو X برابر ہے.........

(a) $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

جوابات: (i) b (ii) c (iii) a (iv) b (v) a (vi) c (vii) a (viii) d

-2 جملوں کو مکمل کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ کو کہا جاتا ہے.........قالب۔

(ii) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ کو کہا جاتا ہے.........قالب۔

(iii) قالب $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ کا جمعی معکوس قالب.........ہے۔

(iv) عام طور پر ضربی قالب BA.........AB۔

(v) قالب A+B ممکن ہے اگر A اور B کا مرتبہ.........ہے۔

(vi) قالب کہا جاتا ہے.........قالب اگر اس کے کالم اور قطاروں کی تعداد برابر ہو۔

جوابات: (i) صفری (ii) وحدانی (iii) $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (iv) ≠ (v) برابر (vi) مربعی

-3 اگر $\begin{bmatrix}a+3 & 4\\ 6 & b-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 6 & 2\end{bmatrix}$ تو ارکان b اور a کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{bmatrix}a+3 & 4\\ 6 & b-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 6 & 2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow a+3=-3$ اور $b-1=2$

$a=-3-3$ ، $b=2+1$

$a=-6$ ، $b=3$

-4 اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ تو درج ذیل قالب معلوم کیجیے۔

(i) 2A + 3 B

حل:

$$2A+3B=2\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}5 & -4\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15 & -12\\ -6 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+15 & 6+(-12)\\ 2+(-6) & 0+(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & -6\\ -4 & -3\end{bmatrix}$$

(ii) −3A + 2B

حل:

$$-3A+2B=-3\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}5 & -4\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -9\\ -3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & -8\\ -4 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-6+10 & -9+(-8)\\ -3+(-4) & 0+(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -17\\ -7 & -2\end{bmatrix}$$

(iii) $-3(A+2B)$

حل:

$$-3(A+2B)=-3\left(\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}5 & -4\\ -2 & -1\end{bmatrix}\right)=-3\left(\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & -8\\ -4 & -2\end{bmatrix}\right)$$

$$=-3\left(\begin{bmatrix}2+10 & 3-8\\ 1-4 & 0-2\end{bmatrix}\right)=-3\begin{bmatrix}12 & -5\\ -3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-36 & 15\\ 9 & 6\end{bmatrix}$$

(iv) $\frac{2}{3}(2A-3B)$

حل:

$$\frac{2}{3}(2A-3B)=\frac{2}{3}\left(2\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}5 & -4\\ -2 & -1\end{bmatrix}\right)=\frac{2}{3}\left(\begin{bmatrix}4 & 6\\ 2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}15 & -12\\ -6 & -3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\begin{bmatrix}4-15 & 6-(-12)\\ 2-(-6) & 0-(-3)\end{bmatrix}\right)=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}-11 & 18\\ 8 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11\times\frac{2}{3} & 18\times\frac{2}{3}\\ 8\times\frac{2}{3} & 3\times\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{22}{3} & 12\\ \frac{16}{3} & 2\end{bmatrix}$$

-5 قالب X معلوم کیجیے اگر $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\end{bmatrix}+X=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\end{bmatrix}+X=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -1 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -1 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4-2 & -2-1\\ -1-3 & -2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

-6 اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 5 & -2\end{bmatrix}$ تو ثابت کیجیے۔

$AB\neq BA$

حل:

L.H.S. $=AB$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\times(-3)+1\times5 & 0\times4+1\times(-2)\\ 2\times(-3)+(-3)\times5 & 2\times4+(-3)\times(-2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0+5 & 0-2\\ -6-15 & 8+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -21 & 14\end{bmatrix}\text{——(1)}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-3)\times0+4\times2 & (-3)\times1+4\times(-3)\\ 5\times0+(-2)\times2 & 5\times1+(-2)\times(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+8 & -3-12\\ 0-4 & 5+6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & -15\\ -4 & 11\end{bmatrix}\text{——(2)}$$

مساوات نمبر (1) اور (2) سے ثابت ہوا کہ $AB\neq BA$

7- اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & -5\end{bmatrix}$ تو ذیل کی تصدیق کیجیے۔

حل:

(i) $(AB)^t = B^t A^t$

L.H.S. $= (AB)^t$

اب

$$AB = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & -5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3\times2+2\times(-3) & 3\times4+2\times(-5)\\ 1\times2+(-1)\times(-3) & 1\times4+(-1)\times(-5)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}6-6 & 12-10\\ 2+3 & 4+5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 2\\ 5 & 9\end{bmatrix}$$

چنانچہ

$$(AB)^t = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 5 & 9\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}0 & 5\\ 2 & 9\end{bmatrix} \text{———} (1)$$

R.H.S. $= B^t A^t$

$$A = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & -5\end{bmatrix} \Rightarrow B' = \begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & -5\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & -5\end{bmatrix}$$

اب

$$B^tA^t = \begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\times3+(-3)\times2 & 2\times1+(-3)\times(-1)\\ 4\times3+(-5)\times2 & 4\times1+(-5)\times(-1)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}6-6 & 2+3\\ 12-10 & 4+5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 5\\ 2 & 9\end{bmatrix} \text{———} (2)$$

مساوات نمبر (1) اور (2) سے ثابت ہے کہ $(AB)' = B'A'$

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

حل:

L.H.S. $= (AB)^{-1}$

اب

$$AB = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\times2+2\times(-3) & 3\times4+2\times(-5)\\ 1\times2+(-1)\times(-3) & 1\times4+(-1)\times(-5)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}6-6 & 12-10\\ 2+3 & 4+5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 2\\ 5 & 9\end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix}0 & 2\\ 5 & 9\end{vmatrix} = (0)(9)-(2)(5) = 0-10 = -10$$

$$\text{Adj }(AB) = \begin{bmatrix}9 & -2\\ -5 & 0\end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} Adj(AB)$$

$$= \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \text{——} (A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (3)(-1) - (2)(1) = -3 - 2 = -5$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{——} (1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = (2)(-5) - (4)(-3) = -10 + 12 = 2$$

$$Adj\ B = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} Adj\ B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{——} (2)$$

مساوات نمبر (1) اور (2) کو ضرب دینے سے

چنانچہ

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} (-5)\times(-1) + (-4)\times(-1) & (-5)\times(-2) + (-4)\times 3 \\ 3\times(-1) + 2\times(-1) & 3\times(-2) + 2\times 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5+4 & +10-12 \\ -3-2 & -6+6 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \text{——} (B)$$

مساوات نمبر (A) اور (B) سے ثابت ہوا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

خلاصہ

☆ حقیقی اعداد کا ایک مستطیلی افقی اور عمودی قطاری خاکہ جو بریکٹ سے محیط کیا گیا ہو ایک قالب کہلاتا ہے۔

☆ قالب A ایک مستطیلی قالب کہلاتا ہے اگر اس میں افقی قطاروں کی تعداد اور عمودی کالموں کی تعداد برابر نہ ہو۔

☆ قالب A ایک مربعی قالب کہلاتا ہے اگر A میں قطاروں کی تعداد کالموں کی تعداد کے برابر ہو۔

☆ قالب A ایک قطاری قالب کہلاتا ہے اگر A میں صرف ایک قطار ہو۔

☆ قالب A ایک کالمی قالب کہلاتا ہے اگر A میں صرف ایک کالم ہو۔

☆ قالب A ایک صفری یا (null) قالب کہلاتا ہے اگر A کا ہر رکن صفر ہو۔

☆ اگر A ایک قالب ہو تو A^t ایک نیا قالب ہے جس کو A کا ٹرانسپوز قالب کہتے ہیں جو قالب A کی قطاروں کو بالترتیب کالموں میں

تبدیل کرنے یا کالموں کو بالترتیب A کی قطاروں میں تبدیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

☆ ایک مربعی قالب کو سیمٹرک (symmetric) قالب کہتے ہیں اگر $A^t = A$۔

☆ $(-A)$ کو قالب A کا منفی قالب کہتے ہیں جسے قالب A کے تمام ارکان کو ان کے منفی ارکان میں بدل دینے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

☆ ایک مربعی قالب M کو ایک سکیو سیمٹرک (Skew symmetric) قالب کہتے ہیں۔ اگر $M^t = -M$۔

☆ ایک مربعی قالب M ایک وتری قالب کہلاتا ہے اگر کم از کم ایک وتری رکن صفر نہ ہو اور غیر وتری تمام ارکان صفر ہوں۔

☆ ایک وتری قالب وحدانی قالب کہلاتا ہے اگر اس میں تمام وتری ارکان 1 ہوں۔

☆ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ کو 3-by-3 وحدانی (identity) قالب کہتے ہیں۔

☆ کوئی بھی دو قالب A اور B ایک دوسرے کے مساوی یا برابر کہلائیں گے اگر

(i) B کا مرتبہ = A کا مرتبہ

(ii) A اور B کے متناظرہ ارکان آپس میں برابر ہوں۔

☆ کوئی بھی دو قالبوں M اور N پر جمع کا عمل اس وقت ممکن ہوگا اگر N کا مرتبہ = M کا مرتبہ۔

☆ اگر قالب A، 2-by-3 مرتبہ کا ہو تو قالب B قالب A کا جمعی ذاتی قالب ہوگا۔

$$B + A = A = A + B$$

☆ قالب B قالب A کا جمعی معکوس کہلاتا ہے۔ اگر $B + A = O = A + B$

☆ قالب B ایک دوسرے قالب A کا وحدانی ذاتی (identity) قالب کہلاتا ہے۔ اگر بلحاظ ضربی عمل $BA = A = AB$

☆ اگر $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک 2-by-2 مرتبے کا قالب ہے اور ایک حقیقی عدد قالب M کا مقطع کہلاتا ہے جو ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

☆ ایک مربعی قالب M غیر نادر کہلاتا ہے۔ اگر قالب M کا مقطع صفر کے برابر نہ ہو۔

☆ ایک مربعی قالب M نادر قالب کہلاتا ہے اگر M کا مقطع صفر ہو۔

☆ اگر قالب $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ہو تو اس کا ایڈجائنٹ (adjoint) متعارف اور ظاہر یوں کیا جاتا ہے۔

$$\text{Adj } M = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

☆ اگر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک مربعی قالب ہو تو اس کا ضربی معکوس

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\text{Adj } M$$

جبکہ $\det M = ad - bc \neq 0$

☆ مندرجہ ذیل قوانین بلحاظ قالبوں کے جمعی عمل مصدقہ ہیں۔

(i) $M + N = N + M$ (قانون مبادلہ)

(ii) $(M + N) + T = M + (N + T)$ (قانون تلازم)

☆ دو قالبوں M اور N کے ضربی عمل سے قالب MN کا حاصل ممکن ہے۔ اگر

N میں قطاروں کی تعداد = M میں کالموں کی تعداد

اور عام طور پر $MN \neq NM$

(i) $(MN)T = M(NT)$ (قانون تلازم بلحاظ ضرب)

(ii) $M(N+T) = MN + MT$

(iii) $(T+N)M = TM + NM$ } (تقسیمی قانون)

☆ (iv) $(MN)^t = N^t M^t$ (قانون ٹرانسپوز)

(v) $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$ (قانون معکوس)

(vi) $MM^{-1} = I = M^{-1}M$

☆ دو مندرجہ ذیل مساواتوں کا ایک مستقبل باہمی حل ممکن ہے۔

$$ax + by = m$$

$$cx + dy = n$$

اگر عددی سروں کا قالب $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ غیر نادر ہو۔

اور سسٹم کی قالبی مساوات $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ ہو

اور ان کے حل کے لیے یوں لکھا جائے $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

ضربی عمل کے بعد قالبوں کے برابری کے اصول سے x اور y کی قیمتوں کا حصول حل تصور ہوگا۔

کریمر قانون میں قالبوں کے مقطعوں کی مدد سے حل درج ذیل ہوگا۔

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{اور} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{جبکہ} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

معروضی سوالات

☆ درست جواب پر (✔) کا نشان لگائیں۔

- قالب کا تصور انگلستان کے انیسویں صدی کے مشہور ریاضی دان............... نے پیش کیا۔

(A) آئزک نیوٹن (B) مادام کیوری (C) آرتھر کیلے (D) ڈاکٹر عبدالسلام

-2 آرتھر کیلے نے قالبوں کی تھیوری .... میں پیش کی۔

(A) 1657-58 (B) 1757-58 (C) 1857-58 (D) 1957-58

-3 حقیقی اعداد کا ایک مستطیلی افقی اور عمودی قطاری خاکہ جو بریکٹ سے محیط کیا گیا ہو .... کہلاتا ہے۔

(A) قالب (B) کالم (C) قالب کا مقطع (D) قطار

-4 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ ہے۔

(A) 1 – by – 2 (B) 2 – by – 3 (C) 3 – by – 3 (D) 3 – by – 2

-5 $[1 \quad 2]$ کا مرتبہ ہے۔

(A) 2 – by – 1 (B) 2 – by – 2 (C) 1 – by – 1 (D) 1 – by – 2

-6 قالب $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ کا مساوی قالب ہے۔

(A) $\begin{bmatrix} 4-1 & 2+1 \\ 1+0 & 2-3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0-1 & 2-1 \\ 0+0 & 2-3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1+0 & 1+1 \\ 0+0 & 3+1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0+1 & 3+1 \\ 0+2 & 1+1 \end{bmatrix}$

-7 اگر $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو $x = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

-8 $[1 \quad 0 \quad 3]$ .... قالب کہلاتا ہے۔

(A) کالمی (B) قطاری (C) مربعی (D) صفری

-9 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .... قالب کہلاتا ہے۔

(A) کالمی (B) قطاری (C) مربعی (D) صفری

-10 $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ .... قالب کہلاتا ہے۔

(A) کالمی (B) قطاری (C) مستطیلی (D) مربعی

-11 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ .... قالب کہلاتا ہے۔

(A) کالمی (B) قطاری (C) مربعی (D) مستطیلی

-12 $[0 \quad 0]$ .... قالب کہلاتا ہے۔

(A) کالمی (B) مربعی (C) صفری (D) منفی

-13 ایسا قالب جس میں صرف ایک ہی قطار ہو کہلاتا ہے۔

(A) کالمی (B) قطاری (C) مربعی (D) مستطیلی

-14 ایسا قالب جس میں صرف ایک ہی کالم ہو .... قالب کہلاتا ہے۔

(A) کالمی (B) قطاری (C) مربعی (D) مستطیلی

15- ایسا قالب جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر نہ ہو قالب کہلاتا ہے۔

(A) کالمی (B) قطاری (C) مربعی (D) مستطیلی

16- ایسا قالب جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو قالب کہلاتا ہے۔

(A) کالمی (B) قطاری (C) مربعی (D) مستطیلی

17- ایسا قالب جس کا ہر رکن صفر ہو ...... قالب کہلاتا ہے۔

(A) وتری (B) صفری (C) وحدانی (D) رکنی

18- قالب $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ کا ٹرانسپوز ہے۔

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

19- $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ کا جمعی قالب ...... ہے۔

(A) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -0 & -2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

20- اگر $(A)^t = A$ ہو تو ایسے مربعی قالب کو ...... قالب کہتے ہیں۔

(A) حقی (B) سکیو سمٹرک (C) سمٹرک (D) وتری

21- اگر $(A)^t = -A$ ہو تو ایسے مربعی قالب کو ...... قالب کہتے ہیں۔

(A) سکیلر (B) سکیو سمٹرک (C) سمٹرک (D) وتری

22- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ...... قالب کہلاتا ہے۔

(A) وتری (B) سکیلر (C) وحدانی (D) ضربی ذاتی

23- $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ ...... قالب کہلاتا ہے۔

(A) صفری (B) سکیلر (C) وحدانی (D) ضربی ذاتی

24- $\begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{bmatrix}$ ...... قالب کہلاتا ہے۔

(A) صفری (B) وحدانی (C) حقی (D) ٹرانسپوز

25- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} = ?$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

-26 اگر $A=\begin{bmatrix}6&4\\5&3\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ہو تو $A-B=$ ؟

(A) $\begin{bmatrix}5&4\\5&2\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}6&0\\0&3\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}7&4\\5&4\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}-5&-4\\-5&-2\end{bmatrix}$

-27 اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ ہو تو $5A=$ ؟

(A) $\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}3&6\\9&12\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}5&10\\15&20\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}6&7\\2&1\end{bmatrix}$

-28 اگر A اور B دو ہم مرتبہ قالب ہوں تو اُن کی جمعی خاصیت A+B = B+A کو .... کہتے ہیں۔

(A) قانون مبادلہ (B) قانون تلازم (C) جمعی قانون (D) جمعی ذاتی قانون

-29 اگر A، B اور C تینوں ہم مرتبہ قالب ہوں اور جمعی خاصیت (A+B) + C = A + (B+C) رکھتے ہوں تو اس خاصیت کو .... کہتے ہیں۔

(A) قانون مبادلہ (B) قانون تلازم (C) منفی قانون (D) جمعی ذاتی قانون

-30 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\right)=$ ؟

(A) $\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}0\\-1\\-3\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

-31 مندرجہ ذیل میں سے قانون تلازم بلحاظ ضرب ہے۔

(A) AB=BA
(B) (AB) C=A(BC)
(C) A(B+C)=AB+AC
(D) (A+B)C=AC+BC

-32 مندرجہ ذیل میں سے بایاں تقسیمی قانون ہے۔

(A) AB=BA
(B) (AB)C=A(BC)
(C) A(B+C)=AB+AC
(D) (A+B)C=AC+BC

-33 مندرجہ ذیل میں سے دایاں تقسیمی قانون ہے۔

(A) AB=BA
(B) (AB)C=A(BC)
(C) A(B+C)=AB+AC
(D) (A+B)C=AC+BC

-34 اگر $A=\begin{bmatrix}6&2\\1&3\end{bmatrix}$ ہو تو $|A|=?$

(A) 15 (B) 16 (C) 18 (D) 20

-35 اگر $|A|=0$ ہو تو مربعی قالب A .... قالب کہلاتا ہے۔

(A) سکیلر (B) وتری (C) نادر (D) غیر نادر

36- اگر $|A| \neq 0$ ہو تو مربعی قالب A .... قالب کہلاتا ہے۔

(A) سکیلر (B) وتری (C) نادر (D) غیر نادر

37- $\begin{bmatrix} x & 5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$ ایک نادر قالب ہو تو x کی قیمت کیا ہوگی؟

(A) 20 (B) 1 (C) -1 (D) 10

38- اگر $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو ؟ = Adj. B

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

39- $A^{-1} = \frac{1}{?} Adj.A$

(A) A (B) [A]

(C) |A| (D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

40- $2x+y=1$ اور $x+3y=0$ ہم زاد مساواتوں میں عددی سروں کا قالب .... ہے۔

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

جوابات:

1- آرتھر کیلے 2- 1857-58 3- قالب 4- 2 – by – 3

5- 1 – by – 2 6- $\begin{bmatrix} 1+0 & 1+1 \\ 0+0 & 3+1 \end{bmatrix}$ 7- 2 8- قطاری

9- کالمی 10- مربعی 11- مستطیلی 12- صفری

13- قطاری 14- کالمی 15- مستطیلی 16- مربعی

17- صفری 18- $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ 19- $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 20- سیمٹرک

21- سکیو سیمٹرک 22- وتری 23- سکیلر 24- وحدانی

25- $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ 26- $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 27- $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$ 28- قانون مبادلہ

29- قانون تلازم 30- $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 31- (AB) C=A(BC) 32- A(B+C)=AB+AC

33- (A+B)C=AC+BC 34- 16 35- نادر 36- غیر نادر

37- 1 38- $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ 39- |A| 40- $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

☆ مختصر سوالات کے جوابات تحریر کریں۔

-1 قالب کی تعریف کریں اور مثال دیں۔

جواب: حقیقی اعداد کا ایک مستطیلی افقی اور عمودی قطاری خاکہ جو بریکٹ سے محیط کیا گیا ہو ایک قالب کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ایک قالب ہے۔

-2 قالب کا تصور کس نے اور کب پیش کیا؟

جواب: قالب کا تصور انگلستان کے انیسویں صدی کے مشہور ریاضی دان آرتھر کیلے نے پیش کیا اس نے 58-1857 میں قالبوں کی تھیوری پیش کی۔

-3 قالب اور اس کے ارکان کو کیسے ظاہر کرتے ہیں؟

جواب: ریاضیات میں قالبوں کو انگریزی کے بڑے حروف تہجی مثلاً A,B,C,M,N وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ قالبوں کے ارکان کو انگریزی کے چھوٹے حروف تہجی a,b,c,d وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔

-4 قالب کے مرتبے سے کیا مراد ہے؟

جواب: قطاروں اور کالموں کی تعداد سے قالب کے مرتبہ کا تعین ہوتا ہے۔ اگر ایک قالب B میں قطاروں کی تعداد p ہو اور کالموں کی تعداد q ہو تو قالب B کے مرتبہ کو p - by - q سے ظاہر کرتے ہیں۔

-5 قالب $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ لکھیں۔

جواب: قالب A کا مرتبہ 3 - by - 1 ہے۔

-6 مساوی قالب کی تعریف کریں۔

جواب: اگر A اور B دو قالب ہوں اور اگر،

(i) A کا مرتبہ = B کا مرتبہ اور

(ii) قالب A کا ہر رکن قالب B کے متناظرہ رکن کے برابر ہو تو قالب A قالب B کا مساوی قالب ہے اسے ہم A=B سے ظاہر کرتے ہیں۔

-7 اگر قالب $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ x & 6 \end{bmatrix}$ اور قالب $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ مساوی قالب ہوں تو x کی قیمت معلوم کریں۔

جواب: $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ x & 6 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

اگر قالب A، قالب B کا مساوی قالب ہو تو $x = 3$۔

-8 قطاری قالب کی تعریف کریں اور مثال دیں۔

جواب: ایسا قالب قطاری قالب کہلاتا ہے جس میں صرف ایک ہی قطار ہو۔ مثلاً:

$A = [1\ 0\ 5],\ B = [4],\ O = [0\ \ 0]$ تمام قطاری قالب ہیں۔

9- کالمی قالب کی تعریف کریں اور مثال دیں۔

جواب: ایسا قالب کالمی قالب کہلاتا ہے جس میں صرف ایک ہی کالم ہو۔ مثلاً

$M = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \; N = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \; O = [0]$ وغیرہ تمام کالمی قالب ہیں۔

10- مستطیلی قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایسا کوئی بھی قالب مستطیلی قالب کہلاتا ہے جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر نہ ہو مثلاً:

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ مستطیلی قالب ہے۔

11- مربعی قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایسا قالب مربعی قالب کہلاتا ہے جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو۔ مثلاً:

$O = [0]$ اور $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ مربعی قالب ہیں۔

12- صفری قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایسا قالب جس کا ہر رکن صفر ہو صفری قالب کہلاتا ہے۔ اسے O سے ظاہر کرتے ہیں۔ مثلاً:

$A = [0 \;\; 0]$ اور $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ صفری قالب ہیں۔

13- قالب کے ٹرانسپوز سے کیا مراد ہے؟

جواب: قالب A کی قطاروں کو کالموں میں بدل دینے سے نئے قالب $(A)^t$ کو قالب A کا ٹرانسپوز قالب کہا جاتا ہے۔

14- قالب $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ کا ٹرانسپوز معلوم کریں۔

جواب: $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$C^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

15- قالب $N = [1 \;\; 3]$ کا ٹرانسپوز معلوم کریں۔

جواب: $N = [1 \;\; 3]$

$N^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

16- منفی قالب کی تعریف کریں۔

جواب: قالب B کا منفی قالب –B ہوگا جس میں قالب B کا ہر رکن اس کے منفی اندراج میں بدل دیا جائے۔

17- قالب $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ کا منفی قالب معلوم کریں۔

جواب: $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ منفی قالب = $-A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

18- $M = [1 \;\; 2]$ کا منفی قالب لکھیں۔

جواب: $M = [1 \;\; 2]$ منفی قالب = $-M = [-1 \;\; -2]$

19- سمٹرک قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایسا مربعی قالب A سمٹرک قالب کہلاتا ہے جس کا ٹرانسپوز قالب $(A)^t$ قالب A کے مساوی ہو یعنی $(A)^t = A$

20- سکیو سمٹرک قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایسا مربعی قالب A سکیو سمٹرک قالب کہلاتا ہے جس کا ٹرانسپوز قالب $(A)^t$ قالب A کے منفی قالب یعنی A− کے مساوی ہو یعنی

$$(A)^t = -A$$

21- قالب $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & -4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ سمٹرک قالب ہے یا سکیو سمٹرک قالب؟

جواب:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & -4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(M)^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & -4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(M)^t = M$ اس لیے قالب M سمٹرک قالب ہے۔

22- قالب $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ سمٹرک قالب ہے یا سکیو سمٹرک قالب؟

جواب:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B)^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B)^t = -B$$

اس لیے B سکیو سیمٹرک قالب ہے۔

23- وتری قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایسا مربعی قالب جس میں وتر کے ارکان میں کم از کم ایک رکن غیر صفر ہو اور وتری ارکان کے علاوہ تمام ارکان صفر ہوں وتری قالب کہلاتا ہے۔ مثلاً $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

24- سکیلر قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایسا وتری قالب جس میں وتر کے تمام ارکان یکساں اور غیر صفر ہوں سکیلر قالب کہلاتا ہے مثلاً $\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ سکیلر قالب ہے۔
جبکہ $s \neq ,0,1$

25- وحدانی قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایک وتری قالب جو سکیلر قالب بھی ہو اور ہر وتری رکن 1 ہو وحدانی قالب کہلاتا ہے جس کو I سے ظاہر کرتے ہیں۔
مثلاً $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

26- اگر $P = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ تو ثابت کریں کہ $(P')' = P$ ہے۔

جواب:

$$P = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(P')' = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(P')' = P$$

چنانچہ ثابت ہوا کہ $(P')' = P$

27- قالبوں کی جمع سے کیا مراد ہے؟

جواب: اگر A اور B دو قالب ہوں جن کے ارکان حقیقی عدد ہوں اور اگر وہ ہم مرتبہ قالب ہوں تو حاصل جمع A+B میں ہر رکن قالب A کے ہر رکن میں قالب B کا متناظرہ رکن جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

28- اگر $M = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ ، $N = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ تو M+N معلوم کریں۔

جواب:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M + N = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 5+(-3) \\ 6+2 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

29- قالبوں کی تفریق سے کیا مراد ہے؟

جواب: اگر A اور B دو ہم مرتبہ قالب ہوں تو حاصل تفریق A−B میں ہر رکن قالب A کے ہر رکن میں سے قالب B کا ہر متناظرہ رکن تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

30- اگر $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو A−B معلوم کریں۔

جواب:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-1 & 5-3 \\ 3-0 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

31- حل کریں۔ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

جواب:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3-4 \\ 4-0 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-1) \\ 2+4 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

32- اگر $Q = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ ہو تو 3Q معلوم کریں۔

جواب:

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$3Q = 3\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 12 \\ -9 & 21 \end{bmatrix}$$

33- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ہو تو A−2B معلوم کریں۔

جواب:

$$A-2B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A-2B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-0 \\ 4-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

34- اگر $A = [5 \quad 3]$ ، $B = [1 \quad 0]$ ہو تو ثابت کریں۔ $A+B = B+A$

جواب:

$$A+B = [5 \quad 3] + [1 \quad 0] = [5+1 \quad 3+0] = [6 \quad 3]$$

$$B+A = [1 \quad 0] + [5 \quad 3] = [1+5 \quad 0+3] = [6 \quad 3]$$

پس ثابت ہوا کہ $A+B = B+A$

35- قانون مبادلہ بلحاظ جمع سے کیا مراد ہے؟

جواب: اگر A اور B دو ہم مرتبہ قالب ہوں تو ان کی جمعی خاصیت $A+B = B+A$ کو قانون مبادلہ کہتے ہیں۔

-36 قانون تلازم بلحاظ جمع سے کیا مراد ہے؟

جواب: اگر B،A اور C تینوں قالب ہم مرتبہ ہوں اور جمعی خاصیت $(A+B)+C=A+(B+C)$ رکھتے ہوں تو اس خاصیت کو جمعی قانون تلازم یا قانون تلازم بلحاظ جمع کہتے ہیں۔

-37 قالب کے جمعی ذاتی قالب سے کیا مراد ہے؟

جواب: اگر B،A دو ہم مرتبہ قالب ہوں اور $A+B = A = B+A$ ہو تو قالب B قالب A کا جمعی ذاتی قالب کہلاتا ہے۔

-38 قالب کے جمعی معکوس سے کیا مراد ہے؟

جواب: اگر A اور B دو ہم مرتبہ قالب ہوں اور $A+B = O = B+A$ ہو تو قالب A اور B دونوں ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

-39 قالبوں کی خاصیت تلازم بلحاظ ضرب سے کیا مراد ہے؟

جواب: اگر B،A اور C تین قالب ہوں جن پر ضرب کا عمل ممکن ہو اور $(AB)C=A(BC)$ ہو تو یہ قانون ضربی قانون تلازم کہلاتا ہے۔

-40 قالبوں کی جمع اور تفریق پر ضرب کے تقسیمی قوانین سے کیا مراد ہے؟

جواب: اگر تین قالب B،A اور C ہوں تو ان کے ضرب کے جمع اور تفریق پر تقسیمی قوانین درج ذیل ہیں۔

$A(B\pm C) = AB \pm AC$ ، بایاں تقسیمی قانون

$(A\pm B)C = AC \pm BC$ ، دایاں تقسیمی قانون

-41 ضربی ذاتی قالب سے کیا مراد ہے؟

جواب: دو قالب A اور B ہوں تو قالب B قالب A کا ضربی ذاتی قالب کہلائے گا اگر $AB = A = BA$

-42 اگر $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **ہو تو قالب کا مقطع معلوم کریں۔**

جواب:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (8)(2) - (4)(1) = 16 - 4 = 12$$

-43 نادر قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایک مربعی قالب A نادر قالب کہلاتا ہے اگر اس کا مقطع |A| صفر کے مساوی ہو یا $|A|=0$

-44 غیر نادر قالب کی تعریف کریں۔

جواب: ایک مربعی قالب A غیر نادر قالب کہلاتا ہے اگر A کا مقطع |A| صفر کے مساوی نہ ہو یا $|A| \neq 0$

-45 قالب $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **ہو تو قالب C نادر قالب ہے یا غیر نادر قالب؟**

جواب:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(4) - (2)(0) = -4-2 = -6 \neq 0$$

لہٰذا C غیر نادر قالب ہے۔

-46 قالب $M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ نادر قالب ہے یا غیر نادر قالب؟

جواب:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (4)(0) - (2)(0) = 0 - 0 = 0$$

چنانچہ M ایک نادر قالب ہے۔

-47 اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ x & 3 \end{bmatrix}$ نادر قالب ہو تو x کی قیمت معلوم کریں۔

جواب:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ x & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ x & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (x)(1) = 12 - x$$

اگر A نادر قالب ہو تو

$$|A| = 0$$
$$0 = 12 - x$$
$$12 - x = 0$$
$$-x = -12$$
$$x = 12$$

-48 قالب $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ کا ایڈ جائنٹ معلوم کریں۔

جواب:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } B = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

-49 قالب $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ کا ایڈ جائنٹ معلوم کریں۔

جواب:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

-50 قالب کے ایڈ جائنٹ سے کیا مراد ہے؟

جواب: اگر قالب $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک مربعی قالب ہو تو اس کا ایڈ جائنٹ قالب ایک ایسا قالب ہے جو A کے وتری ارکان کو باہمی تبدیل کرنے کے ساتھ اور غیر وتری ارکان کو منفی ارکان میں بدل دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

✱✱✱✱